Chapitre 5

Autres grandeurs et proportionnalité

Dans ce chapitre, nous parlerons essentiellement de durée, de vitesse et d'autres grandeurs quotient comme le débit. Nous retrouverons ces grandeurs dans le chapitre sur l'utilisation des équations pour résoudre les problèmes. Un des objectifs de ce chapitre est de montrer qu'il est possible de traiter beaucoup de problèmes portant sur la vitesse sans recourir à la mise en équation et à la fameuse relation $V = \frac{d}{t}$.

Nous utiliserons dans ce chapitre des raisonnements élémentaires basés sur la proportionnalité.

Nous verrons dans la partie exercice que ces raisonnements élémentaires conviennent également pour résoudre les problèmes simples liés aux pourcentages.

Qu'est-ce que la proportionnalité ?

- On achète des livres coûtant tous le même prix. Si le nombre de livres achetés double (ou triple), le prix total double (ou triple) également.
- On s'intéresse à des rectangles ayant tous un côté de 3 cm. Si l'autre côté du rectangle double (ou triple), l'aire du rectangle double (ou triple) également.
- Un cycliste roule à vitesse constante. Si la durée du trajet double (ou triple), la distance parcourue double (ou triple) également.

Ces trois situations fournissent des exemples de grandeurs proportionnelles et peuvent être reformulées ainsi :

- Quand on achète un certain nombre de livres coûtant tous le même prix, le prix total est proportionnel au nombre de livres.
- Si des rectangles ont tous un côté de 3 cm, leur aire est proportionnelle à la mesure de l'autre côté.
- Dans un déplacement à vitesse constante, la durée du trajet est proportionnelle à la distance parcourue.

Les manuels de l'école élémentaire antérieurs à la réforme de 1970 proposaient des définitions voisines de celle-ci :

On dit que deux grandeurs sont proportionnelles si, quand l'une des deux grandeurs est multipliée par 2, 3, 4... l'autre est également multipliée par 2, 3, 4...

Méthodes de calcul adaptées aux situations de proportionnalité.

Presque toutes les méthodes qui suivent sont des applications directes de la définition que nous rappelons ici : deux grandeurs sont proportionnelles si, quand l'une des deux grandeurs est multipliée par 2, 3, 4... l'autre est également multipliée par 2, 3, 4...

Le cas le plus simple

Un piéton marche à une vitesse constante. Il parcourt 240 mètres en 3 minutes, combien parcourra-t-il en 15 minutes ?

L'expression « à vitesse constante » signifie précisément que si le piéton marche 2, 3 ou 4 fois plus longtemps, il parcourra 2, 3 ou 4 fois plus de distance.

15 minutes, c'est 5 fois 3 minutes, la durée est multipliée par 5, la distance parcourue l'est également. En 15 minutes le piéton parcourra donc 5 fois 240 mètres, soit 1200 mètres.

$\xrightarrow{\times 5}$

nombre de m parcourus	240	1200
durée en minutes	3	15

Le tableau ne rend pas compte des raisonnements qui justifient les calculs. Par ailleurs, l'usage systématique du tableau peut entrainer un manque de vigilance sur la question de la proportionnalité : quelle raison avons-nous de penser que les deux grandeurs sont proportionnelles ?

Cependant, les tableaux sont clairs et synthétiques, nous les utiliserons donc malgré leurs inconvénients pour exposer les différents raisonnements liés à la proportionnalité.

Les méthodes générales pour les cas moins simples

Un piéton marche à une vitesse constante. Il parcourt 240 mètres en 3 minutes.

Combien parcourra-t-il en 5 minutes ?

Il n'y a pas de relation multiplicative aussi évidente entre 3 et 5 qu'entre 3 et 15. Cette difficulté peut être contournée à l'aide d'une étape intermédiaire comme l'indique le tableau suivant : on cherche un nombre de minutes ayant une relation multiplicative simple avec 3 et également avec 5 et on calcule la distance parcourue pendant ce nombre de minutes.

Plusieurs choix sont possibles pour ce nombre intermédiaire, mais trois d'entre eux méritent un intérêt particulier :

Choisir comme intermédiaire le nombre 1.

Si en trois minutes le piéton parcourt 240 m, en une minute il parcourt 3 fois moins.
240 m : 3 = 80 m, il parcourt 80 m en une minute.
En 5 minutes il parcourt 5 fois plus qu'en une minute.
80 m × 5 = 400 m, en 5 minutes il parcourt 400 m.

La solution ainsi rédigée s'appelle « règle de trois ». Si on effectue les mêmes calculs sans écrire le discours qui les justifie, par exemple en utilisant un tableau, on parlera plutôt de « retour à l'unité ».

$\xrightarrow{:3}$ $\xrightarrow{\times 5}$

nombre de m parcourus	240	80	?
durée en minutes	3	1	5

La règle de trois s'appuie sur le sens du problème, son principal inconvénient est qu'elle conduit parfois à des calculs inutilement lourds.

Si le piéton parcourt 500 m en 7 minutes, et qu'on cherche la distance parcourue en 14 minutes, l'usage de la règle de trois conduirait à écrire :

En 7 minutes le piéton parcourt 500 m, donc en une minute il parcourt 7 fois moins, soit $\frac{500}{7}m$.

En 14 minutes, il parcourt 14 fois plus qu'en une minute, soit $14 \times \frac{500}{7}m$.

Il est tout de même préférable de remarquer que 14 minutes, c'est le double de 7 minutes, le piéton parcourra donc le double de 500 m, soit 1000m.

D'autant que la version « règle de trois » n'est juste que si l'on résiste à la tentation d'effectuer la division de 500 par 7.

Si on remplace $\frac{500}{7}m$ par une valeur décimale approchée, le résultat final est faux.

Atteindre le nombre cible en une seule étape.

Par quel nombre faut-il multiplier un nombre a (différent de 0) pour obtenir b ?

La réponse à cette question est le nombre $\frac{b}{a}$.

Pour passer de 3 minutes à 5 minutes, on multiplie la durée par $\frac{5}{3}$, la distance est donc également multipliée par $\frac{5}{3}$.

$\xrightarrow{\times \frac{5}{3}}$

nombre de m parcourus	240	?
durée en minutes	3	5

Cette version présente l'avantage d'être concise, mais l'intuition fonctionne moins bien à propos de multiplication par une fraction que pour des multiplications et des divisions par un entier. Décider si la rapidité du calcul compense ou non le risque de perte de sens dépend de chaque personne.

Le produit en croix

Au lieu d'utiliser comme intermédiaire le nombre 1 comme dans la règle de trois, on peut utiliser le produit du nombre de départ et du nombre cible. Dans notre exemple, on passera donc de 3 minutes à 5 minutes par l'intermédiaire de 15 minutes.

En 15 minutes (5 fois 3 minutes) on parcourt 5 fois plus de distance qu'en 3 minutes, on parcourt donc 240 m $\times$ 5 soit 1200 m.

En 5 minutes, on parcourt 3 fois moins de distance qu'en 15 minutes, on parcourt donc 1200 m : 5 soit 400 m.

$\xrightarrow{\times 5}$ $\xrightarrow{:3}$

nombre de m parcourus	240	1200	?
durée en minutes	3	15	5

Les opérations effectuées ($240 \times 5 = 1200$ puis $1200 : 3 = 400$) sont exactement celles que l'on ferait en utilisant la méthode dite du « produit en croix » :

240	?
3	5

alors $? = \frac{240 \times 5}{3}$

Cependant, avec le produit en croix, le raisonnement qui justifie chaque opération disparait.

Nous déconseillons donc très fortement l'usage du produit en croix pour plusieurs raisons :

— l'absence de référence au sens du problème que l'on cherche à résoudre conduit fréquemment à des absurdités, et en particulier à utiliser ce type de calcul dès qu'on peut disposer des nombres dans un tableau à quatre cases, sans se soucier de savoir s'il y a bien une situation de proportionnalité.

— L'enseignement du produit en croix est explicitement exclu par les textes officiels destinés au collège jusqu'à la classe de cinquième. S'entraîner à utiliser d'autres raisonnements contribue donc également à la préparation de la partie didactique du concours.

Un raisonnement très différent : l'utilisation du coefficient de proportionnalité

Jusqu'à présent, tous les raisonnements que nous avons présentés se basent sur la même idée : « si la durée est n fois plus longue, la distance parcourue est également n fois plus longue ». Seule la façon de choisir le nombre n change. Voici une version très différente :

Pour 3 minutes, on obtient le nombre de mètres parcourus en multipliant le nombre de minutes par 80, alors pour 5 minutes (ou 10 ou 23 ou...) on obtiendra encore le nombre de mètres parcourus en multipliant le nombre de minutes par 80.

<table>
<tr><td>nombre de m parcourus</td><td>240</td><td>?</td><td rowspan="2">↑ ×80</td></tr>
<tr><td>durée en minutes</td><td>3</td><td>5</td></tr>
</table>

Cette façon de calculer correspond à une autre façon d'envisager la proportionnalité, que nous retrouverons dans la partie « fonctions linéaires » page 249

Pour comprendre pourquoi ce qui est énoncé juste avant le tableau est vrai, il faut accepter de faire un peu de calcul. Nous allons montrer par le calcul, en utilisant la propriété précédente, pourquoi cette nouvelle propriété est vraie également.

Pour 3 minutes de trajet, la distance parcourue est 240m, c'est à dire 80×3.

Pour une durée de $5 \times 3\,min$, c'est-à-dire 15 min ; la distance est donc $5 \times 240\,m$, c'est-à-dire $5 \times 80 \times 3\,m$, ou encore $80 \times 15\,m$... ce qui montre que le nombre de mètres parcourus est encore obtenu en multipliant par 80 le nombre de minutes.

Pour une durée de $n \times 3\,min$, c'est-à-dire $3n$ minutes ; la distance est donc $n \times 240$ mètres, c'est à dire $n \times 80 \times 3$ mètres, ou encore $80 \times 3n$ mètres ... ce qui montre que le nombre de mètres parcourus est encore obtenu en multipliant par 80 le nombre de minutes.

C'est le nombre 80 qu'on appelle dans cet exemple le coefficient de proportionnalité.

Dans certains cas, le coefficient de proportionnalité a une signification beaucoup plus claire. Imaginons par exemple que nous ayons réalisé un plan de notre maison. 3 cm sur ce plan représentent 240 cm dans la réalité. Quelle longueur réelle est représentée par 5 cm ?

<table>
<tr><td>longueurs dans la réalité en cm</td><td>240</td><td>?</td><td rowspan="2">$\uparrow \times 80$</td></tr>
<tr><td>longueurs sur le plan en cm</td><td>3</td><td>5</td></tr>
</table>

Les valeurs numériques sont exactement les mêmes que dans l'exemple précédent, mais le coefficient de proportionnalité a ici une signification facile à comprendre : « les longueurs dans la réalité sont 80 fois plus grandes que sur le plan ».

Quand on multiplie 3 centimètres par 80, on obtient 240 centimètres, ce qui est parfaitement normal et conforme à l'intuition.

Quand on multiplie 3 minutes par 80, on obtient 240 minutes, et non 240 mètres… la situation du piéton est donc paradoxale.

On peut lever le paradoxe de deux façons :

— en travaillant avec des nombres sans mentionner les unités « on obtient les nombres de la ligne du haut en multipliant par 80 ceux de la ligne du bas » au prix d'une perte de sens : on ne sait plus de quoi on parle.

— en tenant compte des unités, y compris pour le nombre 80 : « 3 minutes multipliées par 80 *mètres par minute*, c'est 240 mètres ». Cette fois, on sait de quoi on parle, mais les unités-quotients, comme ici la vitesse en mètres par minute, sont parfois difficiles à comprendre et, si vous n'êtes pas très expert, nous vous conseillons plutôt d'utiliser les premières versions, qui font apparaître le même nombre 80 par retour à l'unité (ou règle de trois) : c'est le nombre de mètres parcourus en une minute (ce qui, fort heureusement, est précisément la vitesse en mètres par minute).

Le coefficient de proportionnalité fournit une nouvelle façon de reconnaître que deux grandeurs sont proportionnelles.

Si on peut obtenir les valeurs d'une grandeur en multipliant celles de l'autre grandeur toujours par le même nombre alors ces deux grandeurs sont proportionnelles (et le nombre en question est le coefficient de proportionnalité).

Considérons des triangles ayant tous un même côté de 5 cm qu'on choisira comme base. Alors l'aire de ces triangles est proportionnelle à la hauteur.

Si on note h la mesure de la hauteur relative au côté de 5 cm, alors l'aire de ces triangles est égale à $(5 \times h) : 2$ c'est-à-dire à $2,5h$.

L'aire est toujours obtenue en multipliant la hauteur par 2,5 elle est donc proportionnelle à la hauteur.

Remarquons qu'à partir de la formule de calcul d'aire, on peut aussi utiliser la première caractérisation de la proportionnalité donnée plus haut bien que, dans ce cas, l'utilisation du coefficient de proportionnalité nous semble plus simple :

Si on multiplie la hauteur par 6, elle devient $6h$ *et l'aire devient* $2,5 \times 6h$ *c'est à dire* $6 \times 2,5h$. *On constate que quand on multiplie la hauteur par 6 l'aire est multipliée par 6. Il en irait de même si on utilisait un autre nombre que 6, l'aire est donc proportionnelle à la hauteur.*

Les méthodes opportunistes

Nous avons déjà vu au paragraphe consacré à la règle de trois qu'il est parfois plus simple de se passer des méthodes générales, en voici un autre exemple.

Supposons qu'on ait résolu le problème du piéton et qu'on sache maintenant qu'il parcourt 240 m en 3 min et 400 m en 5 min. Combien ce piéton parcourt-il en 8 minutes ?

On peut bien entendu utiliser n'importe laquelle des méthodes précédentes, puisqu'elles sont générales, mais il semble plus judicieux de remarquer que si le piéton marche 3 minutes puis 5 minutes, il aura marché en tout précisément 8 minutes. La distance parcourue est celle qu'il a parcourue pendant les 3 premières minutes plus celle qu'il a parcourue pendant les 5 minutes suivantes.

Si on souhaite représenter ce raisonnement dans un tableau, les flèches d'opérateur que nous avons employées jusqu'à présent ne peuvent plus servir, nous vous proposons plutôt de nommer chaque colonne du tableau par une lettre et d'indiquer à l'aide de ces lettres les calculs effectués comme ceci :

	a	$b = a \times 5$	$c = b : 3$	$d = a + c$	$e = b \times 4$	$f = e + d$
distance parcourue en mètres	240	1200	400	640	4800	5440
durée en minutes	3	15	5	8	60	68

Nous avons poursuivi le tableau en supposant qu'on cherche ensuite la distance parcourue par le piéton en une heure et 8 minutes.

Le raisonnement utilisé pour remplir les colonnes b, c et e (celui qui fonde la règle de trois et découle directement de la définition que nous avons donnée de la proportionnalité) est désigné comme propriété multiplicative de la linéarité.

Le raisonnement utilisé pour remplir les colonnes d et f est connu comme propriété additive de la linéarité.

Exercices

Exercice 1

Une automobile roule à la vitesse constante de 50 km/h.

En combien de temps parcourt-elle 13 km ?

Exercice 2

Un mélange homogène d'eau et de vin comporte 7 l d'eau pour 50 l de vin.

Combien y a-t-il de vin dans une barrique de 100 l de ce mélange ?

Exercice 3

Un cylindre a une hauteur de 72 cm et un volume de 400 cm^3. On découpe dans ce cylindre une partie cylindrique de hauteur 45 cm.

Quel est le volume de ce nouveau cylindre ?

Exercice 4

Lors d'une élection, le candidat Tartempion a obtenu 279 voix sur 1300 suffrages exprimés.

Quel pourcentage des suffrages exprimés a obtenu Tartempion ?

Exercice 5

Lors d'une élection, le candidat Machin a obtenu 42% des voix dans le bureau A, où il y a eu 1350 suffrages exprimés. Il a obtenu 35% des voix dans le bureau B, où il y a eu 840 suffrages exprimés.

Quel est le pourcentage des suffrages exprimés pour le candidat Machin sur l'ensemble des deux bureaux ?

Exercice 6

Deux automobiles partent à 9 h de deux points situés à 150 km l'un de l'autre et se dirigent l'une vers l'autre. Leurs vitesses sont constantes : 70 km/h pour l'une et 65 km/h pour l'autre.

À quelle heure se rencontrent-elles ?

Exercice 7

Un train relie deux villes en 3h 46 min. Des travaux d'amélioration de la voie devraient permettre de diminuer de 7,5% le temps du trajet. Quelle sera la durée du trajet après les travaux ?

Exercice 8

Deux robinets permettent de remplir la même cuve. Le robinet A utilisé seul remplit la cuve en 3 heures . Le robinet B utilisé seul remplit la cuve en 6 heures. Combien de temps faut-il pour remplir la cuve si on utilise les deux robinets à la fois ?

Exercice 9

Un alliage métallique est formé exclusivement de cuivre, d'argent et d'or.

Dans 120 g de cet alliage, il y a 40 g de cuivre.

Dans 250 g de cet alliage, il y a 75 g d'argent.

Quelle est la masse d'or contenue dans 300 g de cet alliage ?

Exercice 10

Un artisan plâtrier enduit un mur en 3 heures. Son apprenti enduit le même mur en 5 heures.

Si l'artisan et son apprenti travaillent simultanément, combien de temps leur faudra-t-il pour enduire le mur ?

Exercice 11

Avant 2007, le pourcentage de matière grasse dans les fromages était calculé par rapport à la matière sèche (c'est-à-dire après avoir enlevé toute l'eau contenue dans le fromage). Depuis 2007, ce pourcentage est calculé sur la masse réelle du fromage.

Un camembert de 250 g contient 40% d'eau. Avant 2007, ce camembert aurait été étiqueté « 45% de matière grasse ».

Quel est le pourcentage de matière grasse de ce fromage selon les normes actuelles ?

Exercice 12

Une automobile a effectué un trajet en deux heures.

Si la vitesse moyenne de cette automobile avait été plus élevée de 20 km/h, la durée du trajet n'aurait été que de 1 h 30 min.

Quelle était la vitesse moyenne de l'automobile ?

Indications sur les exercices

Exercice 3

La formule de calcul du volume d'un cylindre, *volume = (aire de base)*× *hauteur*, montre que le volume du cylindre est proportionnel à sa hauteur.

Par ailleurs, les nombres 72 et 45 sont des mutiples de 9, ce qui peut être utilisé pour résoudre le problème en calcul mental.

Exercice 5

Il serait possible de calculer directement le pourcentage cherché à l'aide d'une moyenne pondérée (avec des coefficients) ce qui n'est pas vraiment dans l'esprit... mieux vaut calculer le nombre total de suffrages exprimés et le nombre total de voix du candidat Machin.

Exercice 6

Les automobiles se rencontrent quand elles ont parcouru à elles deux les 150 km qui les séparent. Les valeurs numériques choisies permettent une résolution en calcul réfléchi (en écrivant éventuellement des résultats intermédiaires, mais sans poser d'opération, ni utiliser la calculatrice).

Exercice 7

Vous pouvez soit calculer indépendamment 7,5% de 3 heures et 7,5% de 46 min ou bien exprimer la durée avec une seule unité. Si vous choisissez comme unité l'heure, prenez en compte qu'une minute c'est un soixantième d'heure et pas un centième d'heure, donc 3 h 46 min, ce n'est pas 3,46 h mais $\left(3 + \frac{46}{60}\right) h$.

Exercice 8

Vous reconnaissez certainement un problème déjà rencontré au chapitre 2. Seules changent les données numériques. Rappelons que pour combiner utilement les données concernant les deux robinets, il faut se ramener à une même durée : si un robinet déversait 30 litres en 5 minutes et l'autre 20 litres en 5 minutes, il est clair qu'à eux deux ils déverseraient 50 litres en 5 minutes

Exercice 9

Le plus simple est probablement de calculer la masse de cuivre et la masse d'argent dans 300 g d'alliage. Comme l'alliage ne contient rien d'autre que le cuivre, l'argent et l'or...

Exercice 10

Pour résoudre ce type d'exercice, il faut admettre une hypothèse qui, dans la vie réelle, n'a rien de très solide : on supposera que si l'artisan et son apprenti travaillent ensemble pendant une certaine durée ils feront ensemble la somme de ce que chacun ferait individuellement. Une fois ceci admis, cet exercice se traite comme l'exercice 8.

Solutions des exercices

Exercice 1

L'automobile parcourt 50 km en une heure, soit 3600 s. Pour parcourir 1 km il lui faut 50 fois moins de temps, soit 72 s, ou 1 min 12 s *(rappelons que pour diviser par 50 mentalement, on peut diviser par 100 puis multiplier par 2).*

Pour parcourir 13 km, il lui faut 13 fois plus de temps que pour 1 km, soit 13 min et 156 s, c'est-à-dire 15 min 36 s.

Méthode opportuniste :

En un quart d'heure, la voiture parcourt un quart de 50 km, soit 12,5 km.

Pour parcourir 500 m, c'est-à-dire un centième de 50 km, il lui faut un centième d'heure soit 36 s.

Pour parcourir les 13 km, la voiture met donc 15 min 36 s.

Exercice 2

Dans ce mélange, il y a 50 l de vin pour 57 litres de mélange.

Dans un litre de mélange, il y a 57 fois moins de vin soit $\frac{50}{57} l$.

Dans 100 litres de mélange, il y a 100 fois plus de vin soit $\frac{50}{57} \times 100\, l$ ou environ 87,7 litres.

Remarque : en raisonnant ainsi, on déterminerait également le pourcentage de vin dans le mélange. En effet, dire qu'il y a 87,7 litres de vin dans 100 litres de mélange revient à dire que le pourcentage de vin dans le mélange est de 87,7%.

Exercice 3

Si la hauteur du cylindre était de 9 cm (hauteur initiale divisée par 8), son volume serait également divisé par 8, il serait de 50 cm^3.

Pour une hauteur de 45 cm (9 mulitplié par 5), le volume est donc de 50 cm$^3 \times$ 5 soit 250 cm^3.

Autre méthode : Le volume du cylindre est le produit de son aire de base par sa hauteur. L'aire de base est donc égale à $\frac{400}{72}$ *cm*^{2}.

Un cylindre ayant la même base et une hauteur de 45 cm a donc un volume, en cm^3*, égal à* $\frac{400}{72} \times 45$ *soit* $\frac{400 \times 5}{8}$ *ou 250 cm*^{3}*.*

Exercice 4

1300 suffrages correspondent à 100% des voix.

1 suffrage correspond donc à $\frac{100}{1300}$% des voix.

279 suffrages correspondent à $279 \times \frac{100}{1300}$% des suffrages exprimés soit $\frac{279}{13}$% ou environ 21,46% .

Autre méthode : 1300 suffrages correspondent à 100% des voix, 13 suffrages correspondent donc à 1% des voix.

Pour déterminer le nombre de fois 13 dans 279, on pose la division 279 : 13.

On en conclut que le candidat Tartempion a obtenu environ 21,46 fois 13 voix, soit 21,46% des suffrages exprimés.

Exercice 5

Dans le bureau A, le candidat Machin a obtenu $\frac{1350 \times 42}{100}$ voix soit 567 voix.

Dans le bureau B, le candidat Machin a obtenu $\frac{840 \times 35}{100}$ voix soit 294 voix.

Sur l'ensemble des deux bureaux, Machin a obtenu 861 voix sur 2190.

La proportion de voix pour le candidat Machin dans le total des voix exprimées est $\frac{861}{2190}$, or $\frac{861}{2190} \approx 0,393$.

Le pourcentage des voix exprimées obtenu par Machin sur l'ensemble des deux bureaux est d'environ 39,3%.

Remarque : Une fois connus le nombre total de suffrages exprimés et le nombre total de voix obtenues par Machin, le calcul de pourcentage peut s'effectuer comme à la question 4 (et réciproquement, la méthode utilisée ici pouvait l'être à la question 4).

Exercice 6

En une heure les deux automobiles parcourent à elles deux 135 km. Or $135 = 9 \times 15$, les deux automobiles parcourent donc 15 km en un neuvième d'heure soit en 400 s ou 6 min 40 s.

150 km, c'est 135 km + 15 km, les deux automobiles ont donc parcouru cette distance en 1 h 6 min 40 s, elles se rencontrent à 10 h 6 min 40 s.

Exercice 7

10% d'une heure, c'est un dixième d'heure ou 360 secondes. 2,5% d'une heure, c'est quatre fois moins, c'est 90 secondes. 7,5% d'une heure, c'est donc 270 secondes, ou 4 minutes 30 secondes.

10% d'une minute, c'est 6 secondes. 2,5% d'une minute c'est 1,5 seconde. 7,5% d'une minute c'est 4,5 secondes. 7,5% de 46 minutes, c'est 46 fois plus soit 207 secondes, ou 3 minutes 27 secondes.

En tout, les travaux permettront de gagner la durée suivante sur un voyage : $3 \times (4min\,30s) + (3min\,27s)$ soit $16min\,57s$.

Dans la pratique, les durées de trajets en chemin de fer ne sont pas mesurées avec une précision inférieure à la minute, la durée du trajet sera donc ramenée à environ 3 h 29 min.

Autre méthode : $3\,h\,46\,min$ *c'est* $226\,min$. $7,5\%$ *de* $226\,min$, *c'est* $226\times\frac{7,5}{100}\,min$ *soit* $16,95\,min$. $0,95\,min$ *c'est* $0,95 \times 60\,s$ *soit* $57\,s$. *Le trajet sera donc réduit de* $16\,min\,57\,s$.

Exercice 8

En 6 heures, le robinet A remplirait 2 cuves et le robinet B une, les deux robinets ouverts simultanément rempliraient donc 3 cuves.

Ils remplissent donc une cuve en trois fois moins de temps, c'est-à-dire en deux heures.

Exercice 9

L'alliage comprend 40 g de cuivre pour une masse totale de 120 g, le cuivre représente donc 1/3 de la masse de l'alliage *(Remarque : nous utilisons ici le coefficient de proportionnalité qui lie les grandeurs « masse de cuivre » et « masse totale »... ce que nous faisons plutôt rarement, mais quand les valeurs numériques rendent cet usage facile, ne nous en privons pas).* La masse de cuivre dans 300 g d'alliage est donc de 100 g.

Dans 250 g d'alliage, il y a 75 g d'argent, donc dans 50 g d'alliage il y a 15 g d'argent (5 fois moins) et dans 300 g d'alliage (250 g + 50 g) il y a 90 g d'argent (75 g + 15 g).

La masse d'or contenue dans 300 g d'alliage donc 300 g - 100 g - 90 g soit 110 g.

Exercice 10

Le plâtrier enduit 1/3 de mur en une heure, son apprenti 1/5 de mur dans le même temps.

Ensemble en une heure, ils enduisent donc 1/3 + 1/5 soit 8/15 de mur.

En 15 heures ils enduisent donc 8 murs, il leur faut donc 7 h 30min pour 4 murs, 3 h 45 min pour 2 murs et 1 h 52 min 30 s pour un mur.

Pour faire plaisir aux irréductibles, une méthode algébrique :

soit t le temps en heures nécessaire aux deux ouvriers pour enduire le mur, on a $\frac{t}{3} + \frac{t}{5} = 1$. *Il en résulte que* $\frac{5t}{15} + \frac{3t}{15} = 1$; $\frac{8t}{15} = 1$; $t = \frac{15}{8}$.

$\frac{15}{8}\,h = 1\,h + \frac{7}{8}\,h = 1\,h + \frac{420}{8}\,min = 1\,h + 52\,min + \frac{4}{8}\,min = 1\,h\,52\,min\,30\,s.$

Si vous ne comprenez pas comment nous avons traduit le problème par une équation, consultez la partie « mise en équation » du chapitre 13 page 229

Exercice 11

La masse d'eau dans le camembert est de 40% de 250 g soit $(250 : 100) \times 40$ ou $100g$.

La masse sèche du camembert est donc de 150g.

La masse de matière grasse est de 45% de 150 g soit $(150 : 100) \times 45$ ou $67,5g$.

La proportion de matière grasse dans le camembert est de $\frac{67{,}5}{250}$ soit $\frac{270}{1000}$ ou $\frac{27}{100}$.

Selon les normes actuelles, ce camembert contient 27% de matière grasse.

Remarque : les méthodes de calcul de pourcentage vues aux exercices 4 et 5 peuvent très bien s'utiliser ici, même si le dénominateur 250 permet de faire plus simple.

Exercice 12

Méthode algébrique.

La distance parcourue est égale à vt, où v désigne la vitesse moyenne et t la durée du trajet.

Si on note v la vitesse réelle de l'automobile en km/h, la longueur du trajet est égale à $2v$.

La longueur du trajet est aussi égale à $1,5\,(v + 20)$, si on l'exprime à l'aide des données relatives au parcours plus rapide.

On a donc $1,5\,(v + 20) = 2v$; $1,5v + 30 = 2v$; $3v + 60 = 4v$; $v = 60$.

La vitesse moyenne de l'automobile était de 60 km/h.

Remarque : nous pensons pour une fois que la méthode algébrique est la plus simple. Voici tout de même une solution arithmétique.

Quand la vitesse lors d'un trajet est multipliée par 2, 3 ou x, la durée est divisée par 2, 3 ou x.

Quand la vitesse lors d'un trajet est divisée par 2, 3 ou x, la durée est multipliée par 2, 3 ou x.

On dit alors que la vitesse est inversement proportionnelle à la durée du trajet.

Ici, pour passer de 2 heures à 1 h 30, on multiplie la durée par $\frac{3}{4}$, la vitesse est donc divisée par $\frac{3}{4}$, ce qui revient à la multiplier par $\frac{4}{3}$, ou encore à l'augmenter d'un tiers.

On en déduit qu'un tiers de la vitesse moyenne correspond à 20 km/h.

La vitesse moyenne de l'automobile était donc de 60 km/h.