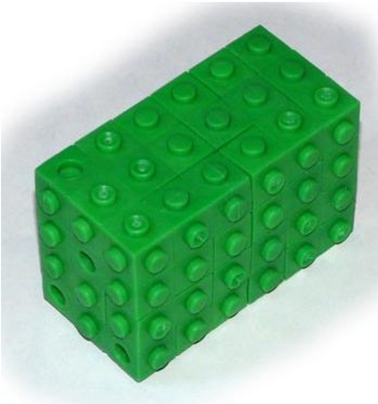
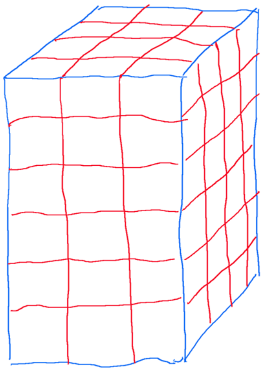
Calculer le volume d'un pavé droit

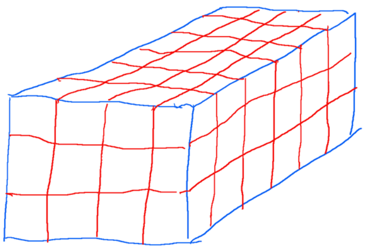


—Voici un pavé, fabriqué en assemblant des petits cubes.
À la fin du travail, nous le démonterons pour compter les petits cubes. Pour l'instant, je vous demande de ne pas le démonter. Votre travail est justement de trouver avec combien de cubes il est fabriqué, sans le démonter.

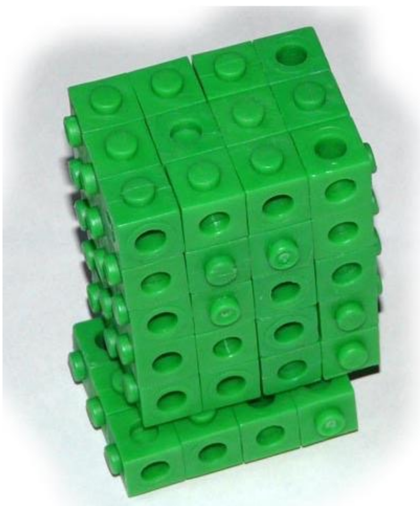
Si chaque groupe d'élèves dispose d'un objet, aucune orientation particulière n'est privilégiée puisque les élèves peuvent poser le pavé sur leur table comme ils l'entendent.

Si la classe ne dispose que d'un objet, l'enseignant le dessinera au tableau à main levée, dans au moins deux positions différentes, et sans indiquer aucune cote.





Lors de la mise en commun, le maître se gardera bien de faire procéder trop rapidement au comptage des cubes. Chacun sait que ce comptage est possible et pourra en dernier recours départager des méthodes différentes, mais on vise à obtenir la conviction de tous indépendamment du comptage.
Dans l'idéal, la séance devrait se terminer ainsi :
—Faut-il démonter le solide pour compter les petits cubes ?
—Non, ce n'est pas la peine, on sait combien il y en a.



Avant d'en arriver là, le maître met en évidence, en s'appuyant autant que possible sur les propositions des élèves le fait que pour trouver le nombre de cubes, on peut imaginer qu'on découpe le solide en couches toutes identiques.
On peut commencer le découpage comme sur la photo ci-contre.

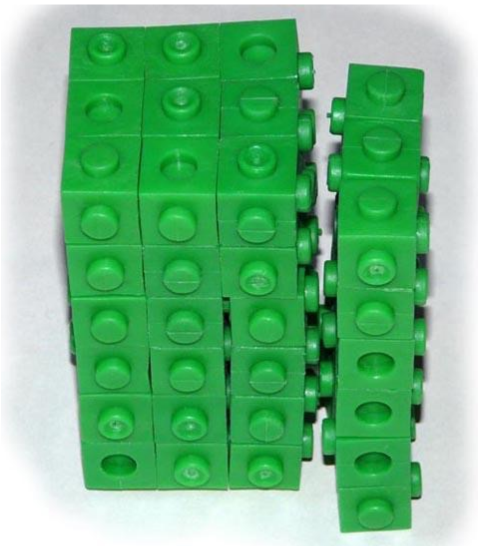
Ce découpage réel n'est pas autorisé lors de la recherche, mais isoler une des couches aide ceux qui n'y ont pas songé à imaginer les suivantes.

Comme toutes les couches sont identiques, le nombre total de cube s'obtient en effectuant :

(nombre de cubes dans une couche) x (nombre de couches)

Calculer le nombre de cubes dans une couche n'est pas difficile : on multiplie le nombre de cubes dans une rangée par le nombre de rangées.
Si on regarde la couche "bien en face", on voit des carrés.
C'est comme si on calculait l'aire d'un rectangle.

Le découpage en couches toutes identiques peut se faire de plusieurs façons différentes, par exemple celle-ci :



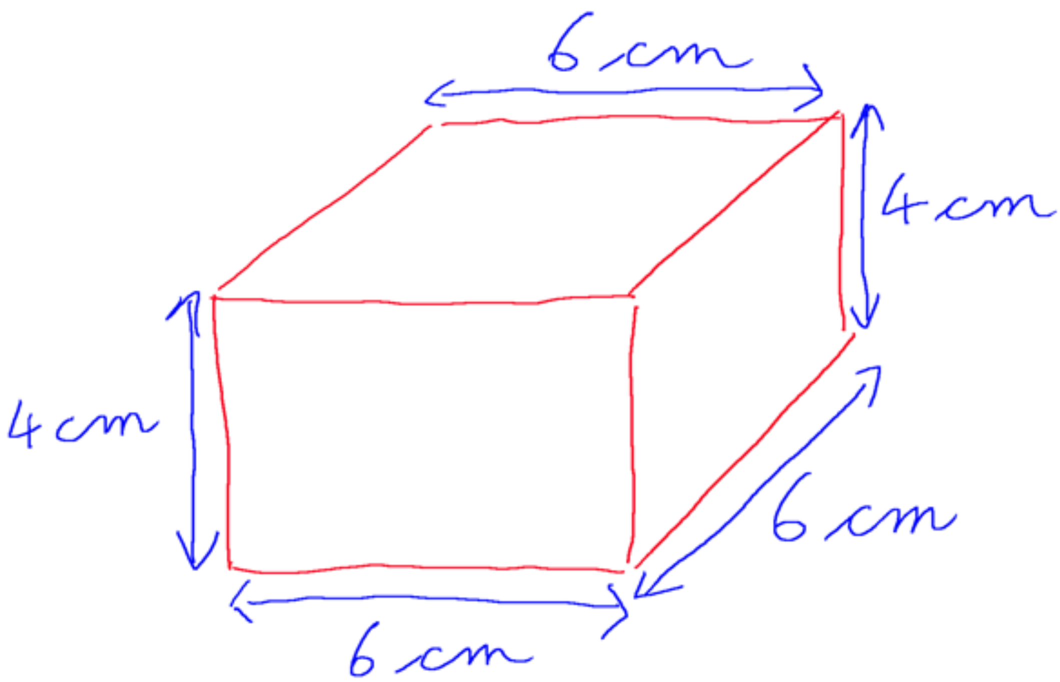
Les textes officiels parlent de "formule du volume du pavé droit" sans préciser quelle est cette formule. Nous pensons qu'on peut très bien s'en tenir à celle qui figure en rouge ci-dessus.
Elle doit être complétée par l'idée suivante : si les petits cubes ont des arêtes de 1 centimètre, alors on les appelle des centimètres cubes.
Pour trouver le volume d'un solide, on imagine qu'on le découpe en petits cubes d'un centimètre d'arête (ou qu'on le remplit de petits cubes).
Si le solide peut se découper en 200 petits cubes d'un centimètre d'arête, on dit que son volume est de 200 centimètres cubes.
On peut garder pour plus tard le fait que, pour des solides plus grands, on utilise le mètre cube ou le kilomètre cube… le transfert n'est pas très difficile.

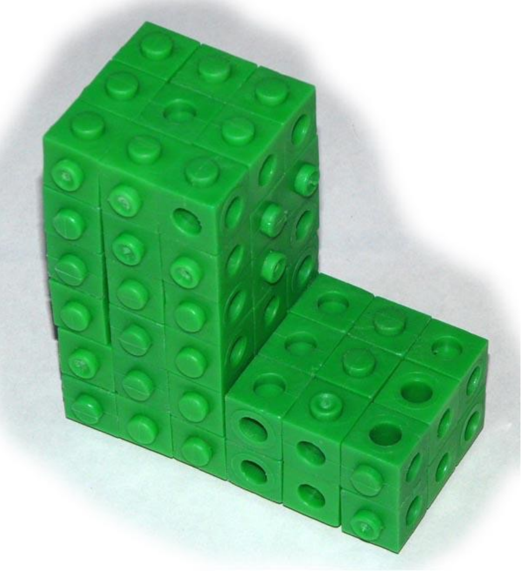
On peut préférer la formule (aire de la base) x (hauteur), qui se généralisera facilement aux prismes droits au collège, mais elle présente deux difficultés :

- L'aire de la base est un nombre de centimètres carrés…or on cherche un nombre de cubes. Bien entendu, il y a autant de centimètres carrés sur la face choisie comme base que de centimètres cubes dans la couche isolée, mais l'idée qui sous-tend le calcul est moins bien mise en évidence.
- Les termes "base" et "hauteur" induisent fortement une orientation particulière du pavé, et beaucoup d'élèves auront du mal à voir une hauteur de 4 cm dans la position de la dernière photo ci-dessus.

On peut préférer la formule longueur x largeur x hauteur qui montre que toutes les dimensions jouent le même rôle, mais les mots employés introduisent des difficultés. Si la plus grande dimension est placée verticalement, faut-il l'appeler hauteur ou longueur ?

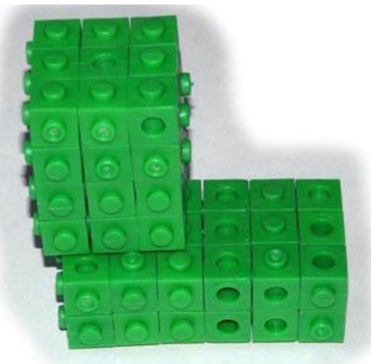
Quand, à la suite de cette leçon, on demandera de calculer le volume d'autres pavés il nous semble important de le faire à partir d'ojets réels, afin que les élèves aient la charge de déterminer les mesures nécessaires.
On lit souvent que "pour calculer le volume d'un pavé, on multiplie ses trois dimensions", ce qui laisse penser qu'il est facile de repérer sur un pavé les trois dimensions à utiliser.
Ce n'est pas le cas.
On aura souvent des surprises en laissant les élèves déterminer eux-mêmes les mesures pertinentes.
Au minimum, si on part de solides dessinés, on fournira plus de cotes que nécessaire afin que les élèves aient à choisir celles dont ils ont besoin.



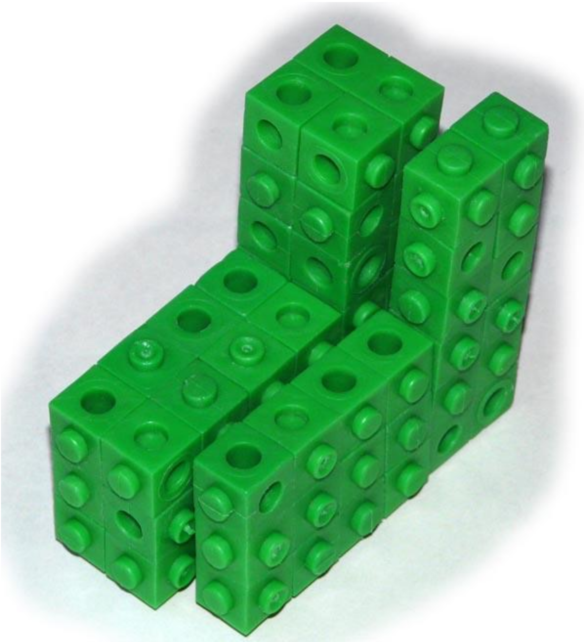


Il est souhaitable de ne pas se contenter de calculer de façon répétitive les volumes de plusieurs pavés droits.
Le calcul du volume d'objets comme celui-ci, obtenu en assemblant deux pavés, est une tâche plus riche et plus motivante car elle offre un véritable défi intellectuel.

Chaque découpage en deux ou trois morceaux ci-dessous permet de calculer le nombre de petits cubes (donc le volume en centimètres cubes si on imagine que les petits cubes on un centimètre d'arête), chaque méthode confirme donc les autres.

Il peut aussi arriver (c'est plus rare) que certains élèves imaginent que l'objet a été fabriqué en partant d'un grand pavé dont on a enlevé une partie… ce qui conduit à une nouvelle méthode de calcul.



Il n'est pas impossible non plus, et si cela se produit il faudra s'en réjouir, qu'une minorité s'aperçoive que la méthode apprise pour les pavés droits peut s'appliquer directement à ce solide. Puisqu'il est possible de découper le solide en trois couches identiques, on peut calculer le nombre de petits cubes en multipliant le nombre de cubes dans une couche par le nombre de couches. Contrairement à ce qui se passe avec un pavé droit, il n'y a pour ce solide (qui est un prisme droit) qu'une seule façon de le découper en couches toutes identiques.