

vérité et opportunité en calcul réfléchi

L'exemple du calcul réfléchi de $26 + 18$

Une des méthodes qu'on voit fréquemment décrite consiste à passer par la dizaine immédiatement supérieure ainsi :

On commence par ajouter 4 pour atteindre la dizaine supérieure à 26

$$26 + 4 = 30$$

Il reste 14 à ajouter

$$30 + 14 = 44$$

Les présentations de cette procédure de passage par la dizaine supérieure occultent presque toujours deux questions très différentes :

La procédure est-elle exacte ?

Cette question est purement mathématique et impersonnelle.

La procédure est exacte, car le calcul proposé peut s'écrire ainsi (formulation destinée aux adultes) : $26 + 18 = 26 + 4 + 14 = 30 + 14 = 44$

L'exactitude de la procédure résulte des propriétés de l'addition.

Le fait que 30 soit la dizaine qui suit 26 ne joue aucun rôle, on peut affirmer pour les mêmes raisons que : $26 + 18 = 26 + 7 + 11 = 33 + 11 = 44$

La procédure est-elle efficace ?

Cette question admet des réponses personnelles variées qui dépendent des connaissances et des capacités de la personne qui calcule.

$14 + 12 + 9 + 9$ ou $26 + 7 + 11$ sont des nombres égaux à $26 + 18$... dont l'écriture ne simplifie pas la tâche du calculateur.

En revanche d'autres écritures de $26 + 18$, comme $26 + 4 + 14$, $24 + 2 + 18$ ou $20 + 6 + 10 + 8$ peuvent faciliter le calcul.

Quand on enseigne le passage par la dizaine supérieure, certains élèves décrochent parce qu'ils ne voient pas de rapport entre le calcul demandé et la procédure proposée comme solution :

l'enseignant demande de calculer $26 + 18$, et commence par effectuer une autre opération ($26 + 4$). Pourquoi fait-il cela ?

Ce n'est pas moins mystérieux s'il commence par chercher la dizaine entière qui suit 26.

Nous proposons d'enseigner non des procédures, mais des propriétés mathématiques de l'addition. Ces propriétés permettent aux élèves de reconnaître, puis d'inventer, d'autres écritures additives représentant le même nombre que $26 + 18$.

Le choix, parmi les écritures désignant le même nombre, de celle qui facilite au mieux le calcul est laissé à chaque élève.

Parenthèse sur l'absence de la bande numérique dans notre proposition

La procédure de passage par la dizaine supérieure est parfois expliquée à l'aide de déplacements sur une bande numérique.

Cela ne nous semble pas pouvoir aider les élèves les plus fragiles.

Certes, $26 + 18$ désigne le nombre auquel on parvient en avançant de 18 cases sur une bande numérique, à partir de la case 26. Cependant, cette signification de l'écriture $26 + 18$ n'est pas une évidence partagée sur laquelle on peut s'appuyer pour justifier une technique de calcul.

Dans le contexte du déplacement sur la bande numérique, même l'égalité « $26 + 18 = 18 + 26$ » est difficile à comprendre alors qu'il est clair, pour la grande majorité des élèves de CE1, que si on compte 26 ronds rouges et encore 18 ronds bleus, on trouvera autant de ronds que si on commence par les ronds bleus.

C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous nous appuyons sur le sens le plus essentiel de l'addition : $26 + 18$ est le nombre d'éléments d'une collection qui comporte 26 éléments et 18 autres éléments.

Nous réservons l'usage de la bande numérique pour plus tard. Il s'agira alors de réinvestir les compétences travaillées à propos des quantités dans un nouveau contexte.

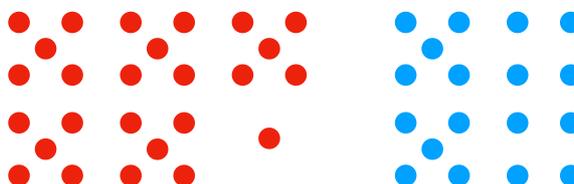
Une proposition de travail sur le calcul réfléchi des sommes

Les séances décrites ci-dessous ont lieu dans une classe imaginaire où il suffit d'expliquer les choses une seule fois pour que tous les élèves aient compris. Dans la réalité, chaque exemple que nous présentons sera suivi d'autres cas analogues.

Les nombres et les égalités en gras comme $26 + 18 = 18 + 26$ sont écrits au tableau par l'enseignant

Première séance :

L'enseignant affiche ces points, à l'aide d'aimants ou de cartes à points.



— Il y a 26 points rouges et 18 points bleus. En tout, il y en a $26 + 18$

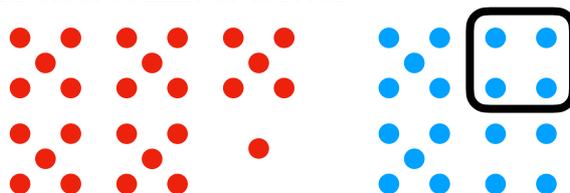
Si je commence par les bleus, je peux aussi écrire qu'il y en a $18 + 26$.

26 points et encore 18 points, c'est la même chose que 18 points et encore 26 points.

Cette phrase mathématique dit la vérité :

$$26 + 18 = 18 + 26$$

L'enseignant entoure 4 points bleus comme ci-dessous :



$$26 + 14 + 4 = 26 + 18$$

— Cette phrase aussi dit la vérité : si je compte les points rouges, et ces points bleus que je n'ai pas entourés, et pour finir les 4 points bleus entourés, j'ai compté tous les points.

$$26 + 18 = 26 + 18 + 4$$

— Cette phrase ne dit pas la vérité, c'est un mensonge mathématique. Si je compte tous les points rouges puis tous les bleus et que je compte une deuxième fois les points bleus entourés, je trouve trop de points.

$$26 + 18 = 4 + 14 + 26$$

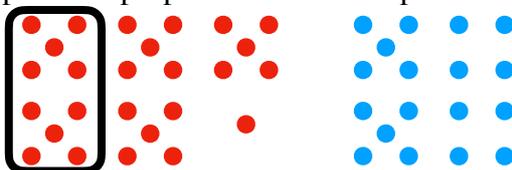
— Cette phrase dit-elle la vérité ? (*Les élèves disposent de cartons « V » « F » et « ? » signifiant par convention « c'est vrai », « c'est faux » et « je ne sais pas », ils lèvent au signal le carton qui convient*).

Le travail se poursuit de façon analogue avec d'autres phrases :

$$26 + 18 = 26 + 14 \qquad 26 + 18 = 26 + 18 + 4 \qquad 26 + 18 = 26 + 4 + 14$$

L'enseignant barre ou efface les phrases fausses.

L'enseignant entoure d'autres points et propose de nouvelles phrases vraies ou fausses :



$$26 + 18 = 16 + 16 + 18$$

$$26 + 18 = 10 + 16 + 18$$

$$26 + 18 = 18 + 16 + 10$$

$$26 + 18 = 10 + 18 + 16$$

$$26 + 18 = 18 + 18 + 10$$

À la fin de la séance, l'enseignant recopie les écritures égales à $26 + 18$ qu'il a proposées :

$$26 + 18$$

$$18 + 26$$

$$26 + 14 + 4$$

$$4 + 14 + 26$$

$$26 + 4 + 14$$

$$10 + 16 + 18$$

$$18 + 16 + 10$$

$$10 + 18 + 16$$

— Voici huit façons d'écrire le même nombre. Tous ces calculs valent autant que $26 + 18$.

*Partager un groupe de points en deux morceaux, ça ne change pas le nombre de points.
Commencer le calcul par un groupe ou un autre groupe, ça ne change pas le nombre de points.*

Il ne faut pas oublier de points ni compter deux fois les mêmes points.

Séances suivantes :

Premier temps :

L'enseignant écrit une somme, par exemple $27 + 36$ sans la représenter par des points. Il écrit ensuite (une à la fois) des phrases mathématiques et demande si elles sont vraies. Les élèves répondent à l'aide de leurs cartons.

$$27 + 36 = 27 + 30 + 6$$

$$27 + 36 = 26 + 1 + 36$$

$$27 + 6 + 36 = 27 + 36$$

$$27 + 36 = 27 + 3 + 33$$

$$27 + 36 = 20 + 7 + 30 + 6$$

$$27 + 36 = 22 + 5 + 31 + 5.$$

$$23 + 4 + 36 = 27 + 36$$

$$27 + 36 = 10 + 17 + 10 + 16$$

Les expressions qu'on compare à $27 + 36$ sont choisies selon deux critères :

- On doit voir facilement si elles résultent ou non de la décomposition de 27 et/ou 36.
- plusieurs expressions doivent permettre un calcul réfléchi efficace.

S'il y a des désaccords et que des justifications sont nécessaires, l'enseignant fait référence à ce qui a été fait la veille : $27 + 36$, c'est le nombre total de points quand il y en a 27 et encore 36. Si un autre calcul compte tous les points, sans en oublier ni compter deux fois les mêmes, il est égal à $27 + 36$.

L'enseignant évite autant que possible d'afficher des points pour illustrer le calcul, il ne le fait que s'il le juge indispensable pour lever une incompréhension.

Attention : à ce stade il ne s'agit pas encore d'effectuer le calcul.

Deuxième temps :

L'enseignant recopie seulement les nombres déclarés égaux à $27 + 36$:

$$27 + 36$$

$$27 + 30 + 6$$

$$26 + 1 + 36$$

$$27 + 3 + 33$$

$$20 + 7 + 30 + 6$$

$$22 + 5 + 31 + 5$$

$$23 + 4 + 36$$

— Nous avons vu que tous ces nombres sont égaux : vous pouvez calculer celui-ci, ou encore celui-ci ou celui-là, vous obtiendrez toujours le même résultat.... Alors, allez-y, choisissez l'écriture qui vous semble la plus facile et calculez.

— Gardez le résultat dans votre tête si vous avez fini...

— Écrivez,

— Montrez vos ardoises.

Une brève mise en commun est effectuée pour savoir quelle écriture ont choisie les élèves qui sont parvenus à trouver le résultat correct.

Plusieurs écritures permettent de simplifier le calcul... parfois à condition de faire mentalement une nouvelle transformation. Par exemple calculer $23 + 4 + 36$ dans l'ordre $36 + 4 + 23$. Parmi les écritures proposées dans notre exemple, seule $27 + 3 + 33$ permet un calcul facile en effectuant les opérations dans l'ordre écrit.

Évolutions de l'organisation du travail

- Quand le travail est devenu familier, après plusieurs séances, on peut demander aux élèves d'inventer eux-mêmes des décompositions égales au calcul demandé. On peut alors se passer d'écrire les égalités : on écrit seulement des calculs dont on affirme oralement qu'ils sont égaux. Une erreur est toujours possible. La phase de vérification est donc maintenue pour s'assurer que tous les calculs proposés sont égaux avant d'en choisir un pour l'effectuer.
- Plus tard, on peut demander aux élèves de proposer seulement des décompositions « futées », qui facilitent le calcul.
- Plus tard encore on peut sauter le premier temps du travail et demander directement aux élèves d'effectuer le calcul à l'aide de la décomposition de leur choix (ou, plus tard dans l'année en s'appuyant comme ils le veulent sur la décomposition ou l'une des deux autres propriétés exposées ci-dessous).

Évolutions du contenu mathématique

Décomposer un ou les deux nombres de la somme est une technique souvent efficace, mais ce n'est pas la seule façon de remplacer une somme par un autre calcul plus simple.

Les deux procédés qui suivent nous semblent mériter d'être enseignés également :

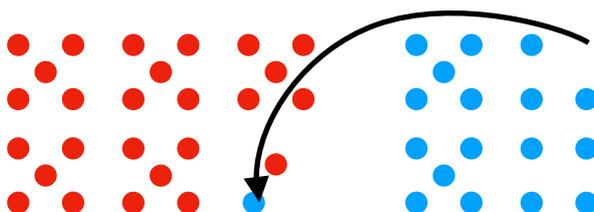
1) *Déplacer des objets*

Reprenons notre collection de points.



Si je déplace un point bleu comme ceci, il y a maintenant 27 points à gauche et 17 à droite. Mais il y a toujours autant de points, je n'en ai pas ajouté, je n'en ai pas enlevé.

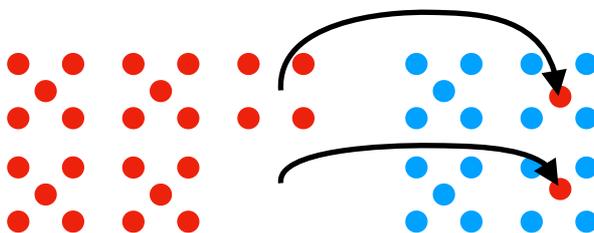
Alors, cette phrase dit la vérité : $26 + 18 = 27 + 17$



Si, à partir de la position de départ, je déplace deux points bleus comme ceci, il y a maintenant 24 points à gauche et 20 à droite.

Mais il y a toujours autant de points, je n'en ai pas ajouté, je n'en ai pas enlevé.

Alors, cette phrase dit la vérité : $26 + 18 = 24 + 20$



Si on déplace des objets d'un groupe à l'autre, le nombre total d'objets ne change pas.

Quand cette propriété est comprise, l'enseignant procède comme pour les décompositions.

Premier temps

— Parmi ces phrases, lesquelles disent la vérité ?

$$26 + 18 = 27 + 17$$

$$26 + 18 = 28 + 16$$

$$26 + 18 = 27 + 19$$

$$26 + 18 = 26 + 17$$

$$26 + 18 = 30 + 16$$

$$26 + 18 = 24 + 20$$

$$26 + 18 = 16 + 28$$

$$26 + 18 = 25 + 19$$

Deuxième temps

— En choisissant une des expressions égales à $26 + 18$, effectuer le calcul

Remarque

La propriété liée au déplacement peut être vue comme le résultat de plusieurs décompositions ou regroupements.

Déplacer 2 points de la collection de 26 vers celle de 18 revient à :

- décomposer 26 en $24 + 2$ ce qui permet de dire que $26 + 18 = 24 + 2 + 18$.
- effectuer le calcul dans l'ordre $18 + 2 + 24$, ce qui permet de dire que $26 + 18 = 20 + 24$
- changer à nouveau l'ordre du calcul $20 + 24$, d'où l'égalité $26 + 18 = 24 + 20$

Penser en terme de déplacement d'objets de la collection conduit donc finalement à effectuer les mêmes calculs que si on s'appuie sur les décompositions. Cependant, les procédures s'appuyant sur le déplacement sont particulièrement économiques, c'est pourquoi nous pensons que cette propriété mérite d'être enseignée.

2) Ajouter trop puis corriger

Reprenons notre collection de $26 + 18$ points.



Ajoutons un point à la collection. Il y en a maintenant $27 + 18$.



Enlevons ce point. Il y a à nouveau $26 + 18$ points.



Pour bien montrer qu'on vient d'enlever un point, on peut aussi dire qu'il y en a $27 + 18 - 1$.

Cette phrase est vraie : $26 + 18 = 27 + 18 - 1$

Reprenons notre collection de $26 + 18$ points.



Ajoutons deux points à la collection. Il y en a maintenant $26 + 20$.



Enlevons ce point. Il y a à nouveau $26 + 18$ points.



Pour bien montrer qu'on vient d'enlever un point, on peut aussi dire qu'il y en a $27 + 18 - 1$.

Cette phrase est vraie : $26 + 18 = 26 + 20 - 2$

*Si on ajoute des points dans la collection puis qu'on les enlève,
ça ne change pas le nombre de points de la collection.*

Quand cette propriété est comprise, l'enseignant procède comme pour les décompositions.

Premier temps

— Parmi ces phrases, lesquelles disent la vérité ?

$$26 + 18 = 27 + 18 - 1$$

$$26 + 18 = 28 + 18 - 2$$

$$26 + 18 = 27 + 20 - 2$$

$$26 + 18 = 26 + 20 - 1$$

$$26 + 18 = 30 + 18 - 4$$

$$26 + 18 = 26 + 19 - 1$$

$$26 + 18 = 26 + 19 - 2$$

$$26 + 18 = 27 + 19 - 2$$

Deuxième temps

— En choisissant une des expressions égales à $26 + 18$, effectuer le calcul.