Chapitre 2

Six problèmes pour indiquer l'esprit du travail

Conseils pour ce chapitre

Chaque étape de cette partie est organisée autour d'un problème. Il convient donc, après avoir lu l'énoncé et s'être assuré qu'on a compris ce dont il s'agit, de prendre un temps personnel pour chercher. Comme les problèmes sont difficiles, il est probable que quelques minutes de recherche ne suffiront pas à le résoudre. Nous allons voir que ce ne sera pourtant pas du temps perdu.

Quand vous avez l'impression de ne plus avancer, de ne plus savoir quoi faire (ou bien quand vous pensez avoir résolu le problème), allez lire la première suggestion. Elle devrait vous donner les moyens de relancer votre recherche. Votre travail devrait donc consister en une alternance de temps de recherche personnelle et de temps conscacrés à lire et comprendre les différentes suggestions.

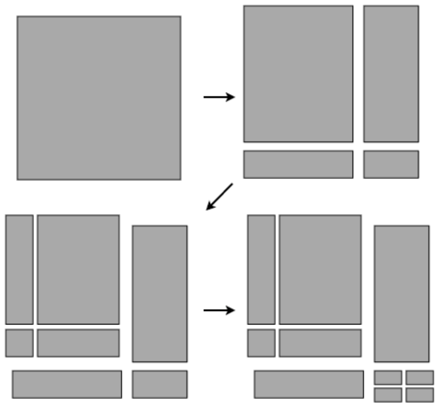
Quand vous parviendrez ainsi à la solution du problème, vous devriez disposer de tous les éléments pour la comprendre, même si vous n'avez pas réussi à la construire par vous même. Revenir ensuite sur ce que vous avez fait, comparer vos essais aux suggestions du livre, devrait vous aider à progresser.

Chaque problème est suivi d'un ou deux problèmes jumeaux. Le travail fait sur le premier problème devrait vous aider considérablement à résoudre son jumeau, à condition de ne pas chercher uniquement à reproduire une solution rédigée : ce sont les démarches suggérées dans les indications qui doivent être réinvesties.

Problème 1 : les papiers découpés

Énoncé du problème

On prend un morceau de papier, par exemple le carré en haut à gauche de l'illustration, et on le coupe en 4 morceaux. On prend ensuite l'un des morceaux (n'importe lequel, mais un seul à la fois) et on le coupe en quatre morceaux. On prend ensuite l'un des morceaux (n'importe lequel, mais un seul à la fois) et on le coupe en quatre morceaux...



Les dessins montrent les trois premières étapes du processus.

Si on effectue encore un grand nombre d'étapes de ce genre, obtiendra-t-on, au bout d'un certain nombre d'étapes, exactement 2000 morceaux ?

Indications

Indication 1

Comptez le nombre de morceaux sur les dessins fournis, imaginez ou effectuez réellement les étapes suivantes du découpage et notez le nombre de morceaux obtenus à chaque nouvelle étape.

Indication 2

Si on compte les morceaux à chaque étape, on trouve qu'il y a d'abord un seul morceau, puis quatre, puis sept, puis dix. En poursuivant et en notant les résultats à l'aide de chiffres et non de phrases, on obtient la liste suivante :

1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31

Observez cette liste, comporte-t-elle une régularité ?

Indication 3

Probablement avez-vous remarqué que la liste se construit en augmentant de 3 à chaque étape. Peut-on expliquer cette régularité et être ainsi certain qu'elle va se poursuivre aussi loin que l'on mène l'expérience ?

Indication 4

À chaque étape, un morceau de papier disparait : celui qu'on coupe en quatre n'existe plus après le découpage. En revanche, quatre nouveaux morceaux apparaissent. L'ajout de trois dans le nombre total de morceaux est donc le résultat de ces deux processus : enlever un morceau et en ajouter quatre. Le problème peut maintenant se reformuler ainsi : on construit une liste de nombres en partant de 1 et en comptant de trois en trois : 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31...

Le nombre 2 000 figurera-t-il dans cette liste ?

Indication 5

Pour mieux montrer le processus d'ajout de 3 à chaque étape, on peut écrire les nombres de la liste de la façon suivante :

$1 \quad 1+3 \quad 1+2\times 3 \quad 1+3\times 3 \quad 1+4\times 3 \quad 1+5\times 3 \quad 1+6\times 3 \quad \dots$

Indication 6

Cette nouvelle écriture peut suggérer au moins trois pistes différentes :

les nombres de la liste sont tous de la forme « 1 plus un certain nombre de fois 3 ». On peut tester des valeurs pour le « certain nombre » et se rapprocher progressivement de 2000. Par exemple $1 + 500 \times 3 = 1501$ est trop petit, et $1 + 1000 \times 3 = 3001$ est trop grand... essayons entre 500 et 1000.

On n'est pas obligé d'écrire tous les nombres de la liste, on peut faire de grands bonds en ajoutant d'un seul coup un grand nombre de fois 3. On peut ainsi passer par exemple de 1 à 901 puis à 1801 en ajoutant à chaque étape 300 fois 3, c'est-à-dire 900. Il est temps de ralentir, car on se rapproche du but.

On peut écrire que tous les calculs sont du même type en utilisant des lettres : les nombres que l'on peut obtenir sont tous de la forme $1 + n \times 3$ (ou n est un nombre entier). Le problème est une nouvelle fois reformulé : le nombre 2000 peut-il s'écrire 1 + 3n, (n étant un nombre entier).

Solutions rédigées

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3.
Voici quelques exemples de nombres qu'on pourra atteindre ainsi (chacun est obtenu en ajoutant un certain nombre de fois 3 au précédent) :

$$1 + 600 \times 3 = 1801$$

$$1801 + 60 \times 3 = 1981$$

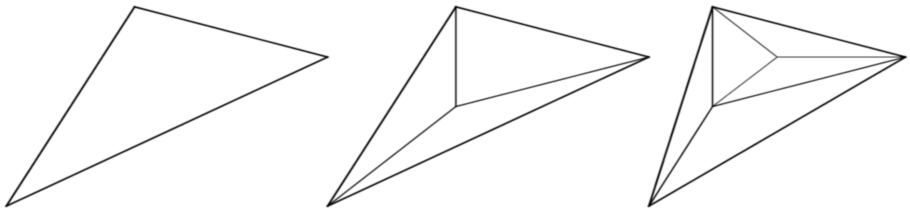
$$1981 + 6 \times 3 = 1999$$

Le nombre de morceaux suivant est 1999+3, soit 2002. Le nombre 2000 ne peut donc pas être atteint.

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3. Le nombre initial étant 1, les autres sont de la forme $3n+1$, où n est un nombre entier. Cette écriture montre que les nombres obtenus ont pour reste 1 dans la division par 3.
2000 a pour reste 2 dans la division par 3, il ne peut donc pas être atteint.

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3. Le nombre de morceaux après n étapes est donc égal à $3n + 1$.
Le problème revient donc à savoir s'il existe un entier n tel que $3n + 1 = 2000$.
L'unique solution de cette équation est $n = \frac{1999}{3}$, ce n'est pas un nombre entier. Il n'est donc pas possible d'obtenir exactement 2000 morceaux.

Problème jumeau : les triangles partagés



À chaque étape, on place un point à l'intérieur d'un des triangles, et on le joint par un segment à chacun des sommets de ce triangle, ce qui a pour effet de le partager en trois triangles. En poursuivant suffisamment longtemps le processus, peut on réussir à ce que le triangle du départ soit partagé en exactement 2013 morceaux ?

Solution rédigée

Chacune des trois rédactions du problème précédent peut être adaptée pour donner une solution correcte de celui-ci, en s'appuyant sur l'idée qu'à chaque étape un morceau est remplacé par trois morceaux : il y a donc deux morceaux de plus qu'à l'étape précédente. Nous vous proposons une autre version, qui ne pouvait pas être utilisée pour le premier problème.

À chaque étape on remplace un triangle par 3 triangles, ce qui revient à ajouter 2 morceaux. Le nombre de morceaux augmente donc de 2 en 2 en partant de 1. De cette façon, on peut atteindre tous les nombres impairs, et en particulier 2013.

Problème 2 : Les nombres écrits sous forme de puissance

Énoncé du problème

On donne le nombre $A = 2^{10} + 2^{10} + 2^{11}$

Écrire si possible ce nombre sous forme d'une puissance d'un nombre entier.

Avant de se lancer dans la recherche, il faut s'assurer que l'on sait bien ce que signifie 2^{10} ou 2^{11}.

2^{10} est une écriture qui résume le calcul suivant : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Il s'agit donc d'une suite de multiplications dans lesquelles ne figure que le nombre 2.

Le 10 placé en exposant indique combien de fois le nombre 2 est écrit dans ce calcul (et pas combien il y a de signes $\times$). Si on écrivait le nombre A sans utiliser d'écriture sous forme de puissance, on devrait donc écrire : $A = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) + (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) + (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

Indications

Indication 1

Si vous ne voyez pas du tout quoi faire, vous pouvez toujours effectuer les multiplications pour calculer la valeur de 2^{10} et celle de 2^{11}.

$2^2 = 2 \times 2 = 4$
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

Vous pouvez aller un peu plus vite en remarquant que chaque ligne est obtenue en doublant la ligne précédente.

Les mêmes calculs se présentent alors ainsi, ce qui est plus économique en écriture :

$2^2 = 2 \times 2 = 4$
$2^3 = 2^2 \times 2 = 8$
$2^4 = 2^3 \times 2 = 16$
$2^5 = 2^4 \times 2 = 32$
$2^6 = 2^5 \times 2 = 64$

Indication 2

Quand vous avez poursuivi les calculs précédents jusqu'à 2^{11}, vous pouvez alors calculer A en aditionnant les valeurs obtenues pour 2^{10} , 2^{10} et 2^{11}

Indication 3

Poursuivez un peu la liste des valeurs des puissances de 2 obtenue à l'étape précédente (calculez 2^{12} , 2^{13} , 2^{14}...) vous constaterez que la valeur calculée pour A à l'étape précédente figure dans cette liste... et pas très loin.

Indication 4

Vous avez sans doute constaté lors des étapes précédentes que :

$2^{10} = 1024$
$2^{11} = 2048$
$2^{12} = 4096$
$A = 1024 + 1024 + 2048 = 4096$ donc $A = 2^{12}$

Ce constat n'est pas satisfaisant bien qu'il réponde à la question, car on obtient un résultat sans en comprendre l'origine. Traiter ainsi une question analogue avec des nombres plus grands serait très fastidieux.

Vous disposez maintenant d'une réponse correcte, cherchez s'il n'était pas possible d'y parvenir de façon plus économique.

Indication 5

Quand nous avons calculé les puissances de 2 successives, quelques étapes plus haut, nous avons écrit des lignes comme : $2^6 = 2^5 \times 2 = 64$

Nous n'avons pas fait remarquer à ce moment que $2^5 \times 2$, c'est la même choses que $2^5 + 2^5$. Le double d'un nombre, c'est ce nombre plus lui même.

Autrement dit, l'égalité $2^6 = 2^5 \times 2$ peut aussi s'écrire $2^6 = 2^5 + 2^5$. Bien entendu, ceci n'est pas vrai seulement à l'étape où l'on calcule 2^5, il est tout aussi vrai, et pour les mêmes raisons, que $2^8 = 2^7 + 2^7$, ou que $2^{11} = 2^{10} + 2^{10}$. Dans l'expression du nombre A, on peut donc remplacer $2^{10} + 2^{10}$ par 2^{11}.

Solutions rédigées

$$\boxed{A = 2^{10} + 2^{10} + 2^{11} = 2 \times 2^{10} + 2^{11} = 2^{11} + 2^{11} = 2 \times 2^{11} = 2^{12}}$$

$$\boxed{A = 2^{10} + 2^{10} + 2^{11} = 2^{10} + 2^{10} + \left(2^{10} + 2^{10}\right) = 4 \times 2^{10} = 2 \times 2 \times 2^{10} = 2^{12}}$$

Remarque :

D'autres présentations sont possibles, et même d'autres solutions puisqu'on peut par exemple écrire A sous la forme 4^6.

Problèmes jumeaux

Écrire si possible le nombre $B = 3^{10} + 3^{10} + 3^{10}$ sous forme d'une puissance d'un nombre entier.

Écrire si possible le nombre $C = 2^{20} \times 4^5$ sous forme d'une puissance d'un nombre entier.

Solutions rédigées

$$\boxed{B = 3^{10} + 3^{10} + 3^{10} = 3 \times 3^{10} = 3^{11}}$$

$$\boxed{C = 2^{20} \times 4^5 = 2^{20} \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 2^{20} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{30}}$$

Remarque : dans cette solution on a choisi de remplacer chacun des nombres 4 apparaissant dans le calcul par $2 \times 2 \ldots$ on pouvait aussi décider de regrouper par paires les 2 du calcul résumé par 2^{20}.

$2^{20} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$2^{20} = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

$2^{20} = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

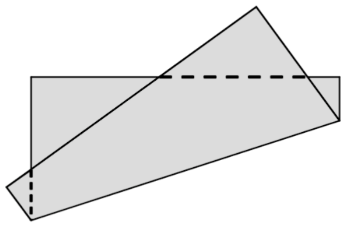
$2^{20} = 4^{10}$

Cette façon de procéder conduit à un résultat de 4^{15} tout aussi correct que 2^{30}.

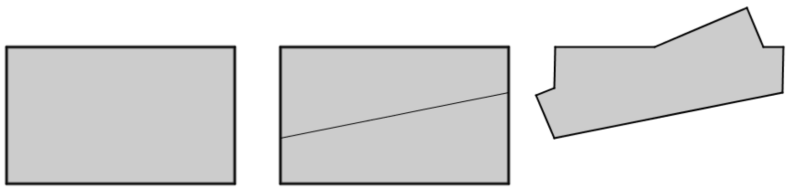
Problème 3 : comparer des périmètres

Énoncé du problème

La figure suivante a été obtenue en pliant une feuille de papier rectangulaire. Les pointillés représentent les bords de la feuille cachés après le pliage, comme s'ils étaient vus par transparence.



On a représenté ci-dessous en taille réduite le rectangle initial, le même avec la marque du pli, et la figure obtenue après pliage.



Sans utiliser ni règle graduée ni compas, comparer, le périmètre du rectangle initial et celui de la figure obtenue après pliage.

On ne peut évidemment se lancer dans la recherche qu'en ayant bien compris la question, c'est-à-dire au moins ce qui suit.

- — Le périmètre d'une figure est la longueur de la ligne qui en fait le tour.
- — Quand la figure est un polygone, c'est la somme des longueurs des côtés.
- — Comparer les deux périmètres, c'est dire lequel des deux est le plus grand (ou éventuellement dire qu'ils sont égaux).

Indications

Indication 1

L'énoncé vous demande de comparer sans utiliser la règle graduée. Cela signifie que, quand vous rédigerez votre solution, vous devrez expliquer comment procéder sans règle graduée. En revanche, rien ne vous interdit de mesurer pour vous faire une idée de la réponse.

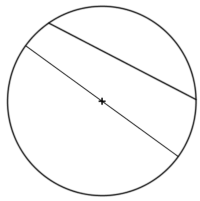
Indication 2

Vous savez maintenant, après avoir mesuré, que le périmètre de la figure obtenue après pliage est inférieur à celui du rectangle initial… reste à le montrer sans recourir à vos mesures.

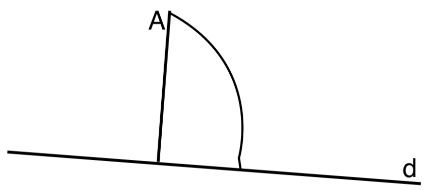
Il y a des situations où vous savez comparer les longueurs de deux lignes sans disposer de mesure.

Ces deux segments sont situés sur une même droite, le segment en pointillés est plus long que celui en trait continu.

Chacun des deux segments est une corde du cercle, c'est-à-dire qu'il joint deux points du cercle. Celui des deux qui passe par le centre (c'est donc un diamètre) est plus long que l'autre.



Pour joindre le point A à la droite d, le segment perpendiculaire à d est plus court que tout autre chemin.



Y a-t-il d'autres situations ou vous pouvez comparer deux longueurs sans disposer de mesures ? Faites en l'inventaire, vous verrez plus tard si le problème posé se rattache à une de ces situations.

Indication 3

Il y a au moins une autre situation que vous connaissez : le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre est la ligne droite. Si vous tracez un segment [AB], il est plus court que n'importe quelle autre ligne allant du point A au point B. Retournez à la figure et voyez si cela vous permet d'avancer.

Indication 4

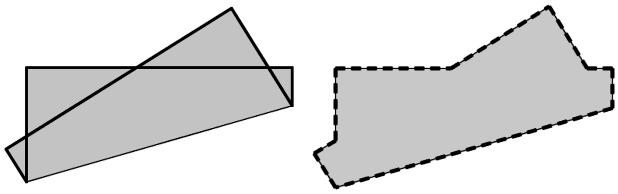
Pour comparer les deux périmètres, il peut être utile de faire apparaître clairement sur la figure les segments dont la longueur doit être comptée dans le périmètre du rectangle, par exemple en les repassant en gras.

Il restera ensuite à comparer la longueur totale de ces segments au périmètre de la figure obtenue par pliage.

Indication 5

Nous avons repassé ici en gras les segments qu'il faut prendre en compte dans le périmètre du rectangle initial.

Nous avons repassé en pointillé les segments qu'il faut prendre en compte dans le périmètre de la nouvelle figure.

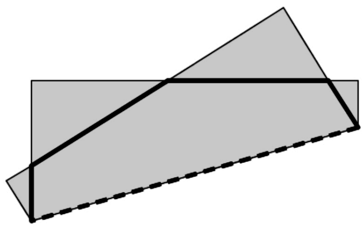


La comparaison entre la longueur des segments en gras et le périmètre de la nouvelle figure reste difficile. Les longueurs de certains segments interviennent dans le périmètre des deux figures.

Si on décide d'effacer ces segments et de ne plus les prendre en compte, on modifie la longueur totale des traits gras continus, ainsi que la longueur totale des traits en pointillé, mais on ne fausse pas la comparaison : en enlevant la même chose aux deux tracés, le plus long des deux trajets reste le plus long.

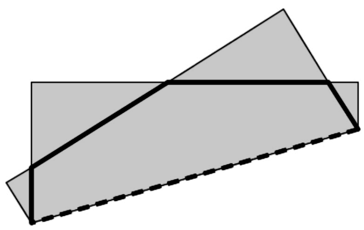
Indication 6

On peut maintenant conclure en comparant la longueur du trait continu et celle du trait pointillé.



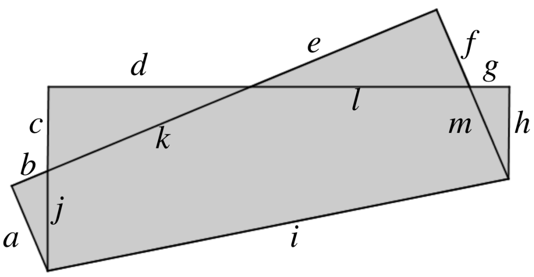
Solutions rédigées

Sur le dessin ci-dessus, les segments qui étaient sur le tour du rectangle mais qui ne sont pas sur le tour de la nouvelle figure sont en trait gras continu. L'unique segment qui est sur le tour de la nouvelle figure mais n'était pas sur celui du rectangle est en pointillé.



Les segments continus mis bout à bout constituent une ligne qui joint les deux extrémités du segment pointillé. Cette ligne est donc plus longue que le segment pointillé.
Comme toutes les autres parties sont communes aux deux périmètres, le périmètre du rectangle est plus long que celui de la nouvelle figure.

Sur la figure ci-dessous, nous avons écrit une lettre à côté de chaque segment de la figure. Cette lettre sera utilisée pour désigner la longueur du segment.



Le périmètre du rectangle est égal à a + b + c + d + e + f + g + h + j + k + l + m
Le périmètre de la nouvelle figure est a + b + c + d + e + f + g + h + i

Appelons D la différence (périmètre du rectangle - périmètre de la nouvelle figure).
D = a + b + c + d + e + f + g + h + j + k + l + m - (a + b + c + d + e + f + g + h + i)
D = (j + k + l + m) - i

Or i est la longueur d'un segment, j + k + l + m est la longueur d'une ligne brisée ayant les mêmes extrémités que ce segment. Par conséquent j + k + l + m > i.

D est donc positif, ce qui revient à dire que le périmètre du rectangle est supérieur à celui de la nouvelle figure.

Problème jumeau

On prend un rectangle en papier auquel on fait subir les transformations suivantes :
- Découper un triangle dans un coin suivant le trait.
- Recoller le même triangle après l'avoir retourné (on inverse la position des deux extrémités du trait de découpe).
- Pour finir, boucher le creux créé à l'étape précédente en collant le triangle grisé.

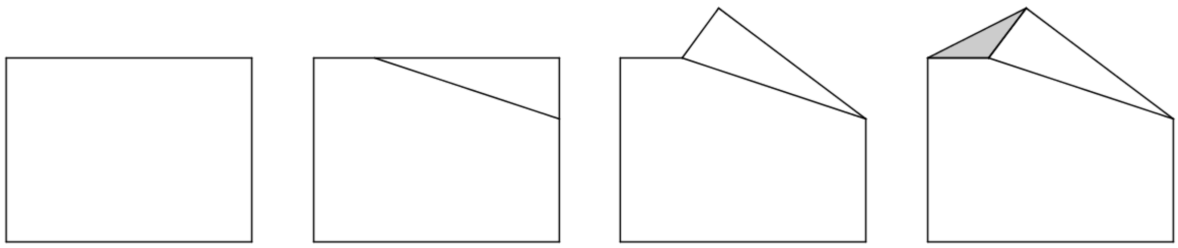


figure 1 figure 2 figure 3 figure 4

Comparez le périmètre de la figure obtenue à la fin du processus au périmètre du rectangle initial.

Solution rédigée

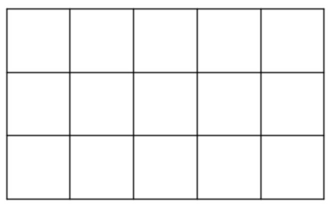
Les numéros de figure indiqués font référence aux figures fournies avec l'énoncé.
La figure numéro 3 a le même périmètre que la figure 2, et donc que le rectangle initial. En effet, la figure 3 est constituée des mêmes segments que la figure 2. Deux segments ont simplement changé de place.
Pour faire le tour de la figure 4, on parcourt un seul côté du triangle gris contre deux dans la figure 3, or le segment qui joint deux points est le plus court chemin entre ces deux points. Toutes les autres parties du pourtour des figures 3 et 4 sont identiques, le périmètre de la figure 4 est plus petit que celui de la figure 3.
En rapprochant les deux étapes précédentes, on constate que le périmètre de la figure 4 est inférieur à celui du rectangle.

Remarque : la figure finale a un périmètre plus petit que celui du rectangle, en revanche son aire est plus grande que celle du rectangle puisqu'elle contient le triangle gris en plus des deux morceaux qui formaient le rectangle.

Problème 4 : dénombrer des rectangles

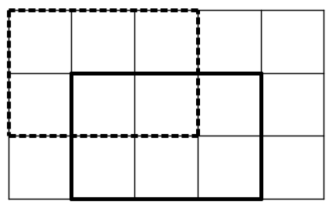
Énoncé du problème

Combien peut-on tracer de rectangles en suivant les lignes de cette grille ?



Avant de commencer à chercher, il faut lever une éventuelle ambiguïté de l'énoncé.

Nous avons tracé sur la figure ci-dessous deux rectangles superposables, l'un en rouge l'autre en bleu. Faut-il les compter tous les deux ? La réponse est oui, on ne demande pas à ce que tous les rectangles soient différents.

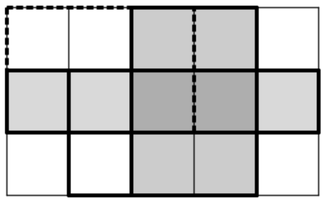


On peut par ailleurs se demander si l'on doit compter les carrés. La réponse est oui, car les mathématiques du concours sont celles du collège : les carrés font partie de la grande famille des rectangles (alors que pour un élève de l'école élémentaire, un carré n'est généralement pas considéré comme un rectangle).

Indications

Indication 1

Une première idée consiste à dessiner tous les rectangles puis à les compter. Il apparait vite qu'ils sont trop nombreux pour que cette méthode soit sure.



Notre première tentative ne comporte que 4 rectangles et il est déjà difficile de s'y retrouver. On peut améliorer un peu les choses en utilisant plusieurs grilles et de la couleur, mais cela n'empêchera probablement pas d'oublier des rectangles ou de dessiner deux fois le même. Pour éviter ces oublis et ces doubles comptes, il faut s'organiser en répartissant les rectangles en plusieurs familles. Chaque famille comportera un plus petit nombre de rectangles, il devrait donc être plus facile de trouver combien il y a de rectangles dans chaque famille puis de calculer le total.

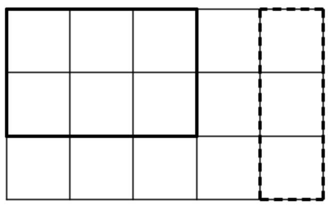
Quelques exemples permettront de mieux comprendre cette méthode.

Première répartition en familles

Chaque rectangle tracé sur la grille contient un certain nombre de carreaux de la grille (de 1 carreau à 15 carreaux). On peut donc répartir les rectangles en 15 familles :
- les rectangles qui contiennent 1 carreau
- les rectangles qui contiennent 2 carreaux
- les rectangles qui contiennent 3 carreaux
- ...
- les rectangles qui contiennent 15 carreaux.

Pour certaines de ces familles, il est très facile de dire combien elle contient de rectangles. Par exemple il y a un seul rectangle qui contient 15 carreaux, il n'y en a aucun qui contient 7 carreaux. Pour d'autres familles, c'est plus difficile (combien y a-t-il de rectangles contenant 3 carreaux ?)... mais c'est tout de même plus facile que de répondre au problème de départ.

Deuxième répartition en familles



Appelons hauteur du rectangle sa dimension dans le sens vertical (en petits carreaux), sur le dessin ci-dessus, le rectangle de gauche a une hauteur de deux petits carreaux, celui de droite a une hauteur de trois petits carreaux.

On peut répartir les rectangles en trois familles :

- — les rectangles qui ont une hauteur d'un carreau
- — les rectangles qui ont une hauteur de deux carreaux
- — les rectangles qui ont une hauteur de trois carreaux

Il y a moins de familles que dans la proposition précédente mais chaque famille est plus nombreuse. Dénombrer une famille sera plus difficile.

Une répartition en familles qui ne convient pas

Supposons qu'on essaie de répartir les rectangles en cinq familles comme suit, l'unité de longueur utilisée étant toujours le côté d'un petit carreau :

- — les rectangles dont un côté mesure 1
- — ...
- — les rectangles dont un côté mesure 5

Certains rectangles seront dans deux familles. Le rectangle rouge par exemple sera dans la famille « les rectangles dont un côté mesure 1 » et dans la famille « les rectangles dont un côté mesure 3 ». En calculant la somme des nombres de rectangles de chaque famille on n'obtiendra pas ce qu'on cherche, parce que certains rectangles seront comptés plusieurs fois.

Inventez d'autres répartitions, en prenant le temps de nommer les familles de façon explicite : « famille 3 » ne dit pas la même chose que « les rectangles qui contiennent 3 carreaux » ni que « les rectangles dont un côté mesure 3 ».

Indication 2

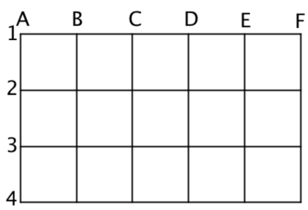
Voici une autre répartition possible :

- — les rectangles qui sont carrés
- — ceux qui ne sont pas carrés

Une autre répartition :

- — les rectangles dont le côté horizontal le plus haut est sur la ligne du haut
- — les rectangles dont le côté horizontal le plus haut est sur la deuxième ligne
- — les rectangles dont le côté horizontal le plus haut est sur la troisième ligne.

Une dernière répartition, dans laquelle les points sont codés en s'appuyant sur ce schéma :



- — les rectangles dont le sommet en haut à gauche est le point A1
- — les rectangles dont le sommet en haut à gauche est le point A2
- — les rectangles dont le sommet en haut à gauche est le point A3
- — ...
- — les rectangles dont le sommet en haut à gauche est le point F4

Dans cette répartition, il y a un très grand nombre de familles, mais chacune ne comporte pas énormément de rectangles (voire aucun rectangle pour la famille F4 par exemple).

Choisissez une répartition qui vous parait prometteuse et essayez de dénombrer chaque famille. Vous pouvez utiliser une des répartitions proposées ici ou une de votre cru. Si vous préférez une répartition que vous avez inventée, assurez-vous que chaque rectangle est dans une famille et une seule.

Indication 3

Si une des familles de votre répartition est trop nombreuse pour compter facilement les rectangles qui la composent… découpez la en sous familles.

Exemple : si vous avez choisi la toute première répartition, selon le nombre de carreaux contenus dans les rectangles. La famille « les rectangles qui contiennent deux carreaux » peut vous paraître encore bien nombreuse, vous pouvez alors la partager de la façon suivante :

- — les rectangles qui contiennent deux carreaux disposés horizontalement
- — les rectangles qui contiennent deux carreaux disposés verticalement.

Chaque rectangle de la famille « deux carreaux » est dans l'une ou l'autre de ces deux sous-familles, L'effectif de la famille « deux carreaux » est alors la somme des effectifs des sous familles « deux carreaux horizontalement » et « deux carreaux verticalement ».

Indication 4

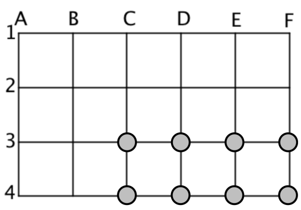
Si vous ne parvenez pas à mener à bien le dénombrement à l'aide de la répartition que vous avez choisie, nous vous suggérons d'utiliser la dernière proposition de l'indication 2, dans laquelle les familles sont nombreuses, mais comportent chacune peu de rectangles.

Indication 5

Dans la répartition suggérée, chaque famille est assez facile à dénombrer en s'y prenant de la façon suivante.

Considérons la famille des rectangles dont le sommet en haut à gauche est le point B2. Où peut se situer le sommet opposé ? Sous l'un des disques gris.

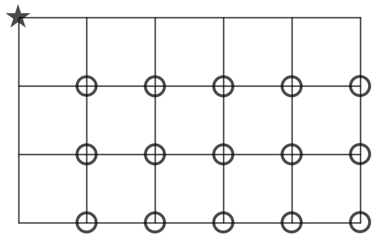
Chaque disque gris correspond à un rectangle possible dont le sommet en haut à gauche est B2 : il y a 8 disques gris donc 8 rectangles dont le sommet en haut à gauche est B2.



Faites la même chose avec chacune des autres familles.

Solutions rédigées

Il y a 15 rectangles dont le sommet en haut à gauche est sur le point marqué d'une étoile.
En effet, le sommet opposé à l'étoile peut être situé sur n'importe quel point marqué d'un cercle.



Effectuons le même travail en prenant comme sommet en haut à gauche des rectangles les autres points de la grille à tour de rôle, et reportons les résultats dans un tableau.

La première ligne du tableau indique les familles : C2 désigne la famille des rectangles dont le sommet en haut à gauche est situé en C2.
La deuxième ligne indique le nombre de rectangles dans chaque famille.

A1	B1	C1	D1	E1	A2	B2	C2	D2	E2	A3	B3	C3	DE	E3
15	12	9	6	3	10	8	6	4	2	5	4	3	2	1

Le nombre de rectangles que l'on peut tracer est la somme des nombres de rectangles de chaque famille.
On peut tracer 90 rectangles.

Il y a 15 rectangles possibles contenant un seul petit carreau.
Les rectangles contenant 2 petits carreaux peuvent être disposés horizontalement ou verticalement.
Ceux qui sont disposés horizontalement peuvent être :

- dans la ligne du haut (4)
- dans la ligne intermédiaire (4)
- dans la ligne du bas (4)

Ceux qui sont disposés verticalement peuvent être disposés dans n'importe laquelle des cinq colonnes de la grille, et comme il y a deux positions pour chaque colonne, on peut tracer 10 rectangles de deux carreaux disposés verticalement.
Il y a donc en tout $12 + 10 = 22$ rectangles de deux carreaux qui peuvent être tracés.
En poursuivant selon le même principe on obtient :

- 15 rectangles d'un seul carreau
- 22 rectangles de 2 carreaux
- 14 rectangles de 3 carreaux (9 horizontaux, 5 verticaux)
- 14 rectangles de 4 carreaux (6 horizontaux et 8 qui sont des carrés)
- 3 rectangles de 5 carreaux
- 10 rectangles de 6 carreaux
- aucun de 7 carreaux
- 4 rectangles de 8 carreaux
- 3 rectangles de 9 carreaux (des carrés)
- 2 rectangles de 10 carreaux

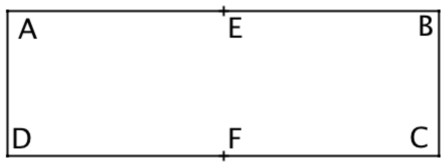
— aucun de 11 carreaux
— 2 rectangles de 12 carreaux
— aucun de 13 carreaux
— aucun de 14 carreaux
— 1 rectangle de 15 carreaux

$15 + 22 + 14 + 14 + 3 + 10 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 90$

On peut tracer 90 rectangles sur cette grille.

Problème jumeau

On considère un rectangle ABCD. E est le milieu de [AB], F est le milieu de [CD]. Combien peut-on tracer de triangles dont les trois sommets sont placés sur les points A, B, C, D, E et F ?



Solution rédigée

Classons les triangles en deux catégories :

— Les triangles qui ont deux sommets sur [AB] et un sur [CD]
— Les triangles qui ont deux sommets sur [CD] et un sur [AB]

La première catégorie peut elle-même être partagées en trois sous-catégories :

— Le sommet sur [CD] est le point C
— Le sommet sur [CD] est le point D
— Le sommet sur [CD] est le point F

Dans chaque sous-catégorie, il y a trois triangles car on peut choisir comme sommets sur [AB] soit A et B, soit A et E, soit B et E. Il y a donc 9 triangles qui ont deux sommets sur [AB] et un sur [CD].

On montre exactement de la même façon qu'il y a 9 triangles dans l'autre catégorie, il y a donc 18 triangles en tout.

Remarques :

Pour le problème précédent, nous avons fourni deux solutions totalement différentes. Des démarches très variées sont également possibles pour ce problème même si nous n'en indiquons qu'une.

Par ailleurs, les catégories que nous utilisons montrent que nous avons considéré que les trois sommets ne peuvent pas être sur le même côté du rectangle : nous ne considérons pas un « triangle aplati » comme un véritable triangle. Si vous avez trouvé 20 triangles, vous avez accepté les triangles aplatis. . . ce qui n'est pas gênant si c'est délibéré (décider que ce sont ou non des triangles est discutable). C'est plus ennuyeux si vous ne vous en êtes pas aperçu.

Problème 5 : les robinets

Énoncé du problème

Deux robinets permettent de remplir la même cuve. Le robinet A utilisé seul remplit la cuve en 12 minutes. Le robinet B utilisé seul remplit la cuve en 18 minutes. Combien de temps faut-il pour remplir la cuve si on utilise les deux robinets à la fois ?

Indications

Indication 1

On peut combiner facilement les informations données à propos de chacun des robinets, quand elles portent sur une même durée. Si un robinet fournit 100 litres d'eau en 20 minutes et l'autre 200 litres d'eau en 20 minutes, en les faisant fonctionner simultanément, on obtient en 20 minutes 100 litres + 200 litres.

Indication 2

Chacune des informations de l'énoncé permet d'en formuler d'autres portant sur des durées différentes.

Le robinet A utilisé pendant deux fois 12 minutes, soit 24 minutes, remplit 2 cuves.

Le robinet A utilisé pendant la moitié de 12 minutes, soit 6 minutes, remplit une demi cuve.

Formulez d'autres énoncés de ce type à propos du robinet A et du robinet B jusqu'à disposer d'une information pour chaque robinet portant sur la même durée.

Indication 3

Voici quelques informations faciles à obtenir

Pour le robinet A :
- En 24 minutes (2 fois 12 minutes) le robinet A remplit 2 cuves.
- En 36 minutes (3 fois 12 minutes) le robinet A remplit 3 cuves.
- En 48 minutes (4 fois 12 minutes) le robinet A remplit 4 cuves.
- En 6 minutes (12 minutes divisées par 2) le robinet A remplit $1/2$ cuve.
- En 3 minutes (12 minutes divisées par 4) le robinet A remplit $1/4$ de cuve.

Pour le robinet B :
- En 36 minutes (2 fois 18 minutes) le robinet B remplit 2 cuves.
- En 54 minutes (3 fois 18 minutes) le robinet B remplit 3 cuves.
- En 9 minutes (18 minutes divisées par 2) le robinet B remplit $1/2$ cuve.
- En 6 minutes (18 minutes divisées par 3) le robinet B remplit $1/3$ de cuve.
- En 3 minutes (18 minutes divisées par 6) le robinet B remplit $1/6$ de cuve.
- En 2 minutes (18 minutes divisées par 9) le robinet B remplit $1/9$ de cuve.

On remarque que certanes durées se retrouvent à la fois dans les informations concernant le robinet A et dans celles concernant le robinet B.

Choisissez une de ces durées et essayez de combiner les deux informations la concernant.

Indication 4

Les durées suivantes figurent dans les deux listes précédentes : 36 minutes, 3 minutes.

Toutes peuvent être utilisées pour résoudre le problème, mais elle ne présentent pas toutes les mêmes avantages ni les mêmes difficultés.

Choisir 36 minutes permet d'utiliser des nombres entiers, ce qui est plus simple, mais on sera obligé d'envisager plusieurs cuves, ce qui peut déranger certaines personnes car on s'écarte de la situation décrite dans l'énoncé : rien n'indique qu'il y ait plusieurs cuves.

Choisir 3 minutes permet de ne pas avoir à imaginer plusieurs cuves... mais au prix de calculs plus difficiles parce qu'ils utilisent des fractions.

Nous conseillons plutôt de faire un effort d'imagination et d'accepter de parler de plusieurs cuves pour avoir des nombres faciles à manier : en 36 minutes, le robinet A remplit... le robinet B remplit... et à eux deux ils remplissent...

Solutions rédigées

En 36 minutes, le robinet A remplirait 3 cuves et le robinet B en remplirait 2.
S'ils fonctionnent simultanément, ils remplissent donc 5 cuves en 36 minutes.
Pour une cuve il leur faut 5 fois moins de temps, or
$36min = 5 \times 7min + 1min$
$36min = 5 \times 7min + 60s$
$36min = 5 \times 7min + 5 \times 12s$
$36min = 5 \times (7min + 12s)$
Il en résulte que cinq fois moins de temps que 36 minutes, c'est 7 minutes et 12 secondes.
Les deux robinets fonctionnant simultanément remplissent donc la cuve en 7 minutes et 12 secondes.

Remarque : Il existe de nombreux autres procédés pour diviser 36 minutes par 5.

En 1 minute, le robinet A remplirait $\frac{1}{12}$ de cuve et le robinet B en remplirait $\frac{1}{18}$. S'ils fonctionnent simultanément, ils remplissent donc $\frac{1}{12} + \frac{1}{18}$ de cuve en une minute.
$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{36}$
Les deux robinets remplissent donc $\frac{5}{36}$ de cuve en une minutes, ou 60 secondes.
Ils remplissent $\frac{1}{36}$ de cuve en cinq fois moins de temps soit en 12 secondes.
Pour remplir une cuve (c'est à dire $\frac{36}{36}$ de cuve) il leur faut 36 fois plus de temps, c'est à dire 36×12 secondes ou 432 secondes.
$432 = 7 \times 60 + 12$ donc 432 secondes = 7 minutes 12 secondes.
Les deux robinets fonctionnant simultanément remplissent donc la cuve en 7 minutes et 12 secondes.

Considérons que le contenu de la cuve est partagé en 36 parties égales.
En une minute le robinet A remplit 3 parties et le robinet B en remplit 2.
À eux deux, ils remplissent 5 parties en une minute, donc une partie en 12 secondes.
Ils remplissent une cuve, soit 36 parties, en 36 x 12 s soit 432 secondes ou 7 min 12 s.

Remarque : cette solution et la précédente ne diffèrent que dans la forme, le raisonnement utilisé est exactement le même.

En effet, chacune des 36 parties égales est précisément ce qu'on désigne dans la version précédente par « $\frac{1}{36}$ de cuve ».

Soit t le nombre de minutes nécessaires au remplissage.
Le robinet A remplit une cuve en 12 minutes, donc $\frac{1}{12}$ de cuve en une minute et $\frac{t}{12}$ de cuve en t minutes.
Le robinet B remplit une cuve en 18 minutes, donc $\frac{1}{18}$ de cuve en une minute et $\frac{t}{18}$ de cuve en 18 minutes.
En t minutes, les deux robinets remplissent exactement une cuve, on a donc :
$\frac{t}{12} + \frac{t}{18} = 1$ d'où on tire $\frac{3t}{36} + \frac{2t}{36} = \frac{36}{36}$ puis $5t = 36$ et enfin $t = \frac{36}{5} = \frac{35}{5} + \frac{1}{5} = 7 + \frac{1}{5}$.
La durée nécessaire, en minutes, est $7 + \frac{1}{5}$ soit 7 minutes et 12 secondes.

Variante sur la méthode précédente (seule la fin est reprise, car la modification ne porte que sur la façon de revenir à une écriture en minutes et secondes).

$\frac{t}{12} + \frac{t}{18} = 1$ d'où on tire $\frac{3t}{36} + \frac{2t}{36} = \frac{36}{36}$ puis $5t = 36$ et enfin $t = \frac{36}{5} = 7,2$.
Un minute, c'est 60 secondes, donc un dixième de minute c'est 6 secondes et 2 dixièmes de minutes, c'est 12 secondes.
La durée nécessaire est donc de 7 minutes et 12 secondes

Problème jumeau

Louise et Jules travaillent ensemble pour peindre un grand mur.
Si Louise travaillait seule, il lui faudrait 20 heures pour peindre le mur, si Jules travaillait seul, il lui faudrait 25 heures pour peindre le mur.
En combien de temps peindront-ils le mur à eux deux ?

On suppose que la surface peinte à eux deux en une certaine durée est la somme des surfaces que chacun peindrait seul pendant la même durée.

Cela revient à dire que Louise et Jules ne se gênent pas l'un l'autre pendant les travaux, et que le fait d'être deux ne les rend pas non plus plus efficaces.

Les mathématiques peuvent seulement dire ce qui se passe dans le cas où ces hypothèses sont vraies. Elles ne peuvent ni prouver que ces hypothèses sont vraies ni prédire la durée nécessaire si elles sont fausses.

Solution rédigée

En une heure, Louise peint $\frac{1}{20}$ de mur et Jules $\frac{1}{25}$.
À eux deux, en une heure ils peignent $\frac{9}{100}$ de mur car $\frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{5}{100} + \frac{4}{100} = \frac{9}{100}$.
Pour peindre $\frac{1}{100}$ de mur ils mettent donc 9 fois moins de temps, soit 400 secondes car une heure = 3600 s, et 3600 s : 9 = 400 s.
Pour peindre le mur entier, il leur faut 100 fois plus de temps, soit 40 000 s.
Or 10 h = 36 000 s ; 11 h = 39 600 s
Il leur faut donc 11 h et 400 s, soit 11 h 6 min 40 s.

Problème 6 : le rectangle à construire

Énoncé du problème

On donne une droite d et deux points A et C situés de part et d'autre de d, tels que AC = 8 cm. Construire un rectangle ABCD tel que le point B soit sur la droite d.

Indications

Indication 1 : règle du jeu

Ce type d'exercice est en réalité un exercice de démonstration déguisé.

Si vous tâtonnez en dessinant un rectangle puis un autre, en repoussant légèrement la position du point B jusqu'à ce que ça marche à peu près, vous n'aurez aucun point le jour du concours.

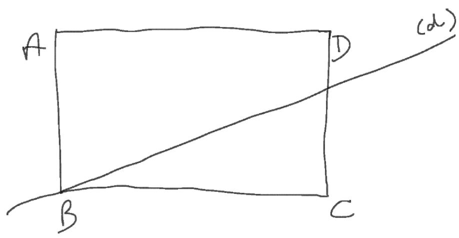
Cela n'interdit pas ce type de tâtonnement au brouillon, pour voir à quoi peut ressembler le rectangle cherché.

Le correcteur ne va pas prendre un calque pour vérifier si votre dessin est conforme à ce qui est attendu, il va observer vos traits de construction (droites tracées à la règle, cercles tracés au compas) et se demander si ces tracés permettent de prouver que la figure obtenue répond bien aux critères imposés. Si la preuve est impossible, la construction est considérée comme fausse.

Indication 2

Faire des essais en tâtonnant au brouillon comme indiqué plus haut ne peut pas nuire. Cependant, pour tous les problèmes de construction, il y a une utilisation du brouillon généralement beaucoup plus efficace : prenez le problème à l'envers.

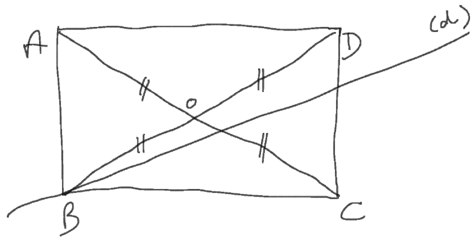
On vous demande de construire un rectangle ABCD, alors commencez par lui : dessinez un rectangle ABCD au brouillon à main levée. tracez ensuite une droite qui passe entre A et C et par le point B. Dans cet ordre, la réalisation de la figure à main levée est extrêmement facile, elle ne doit pas vous prendre plus de quelques secondes.



Utilisez maintenant votre figure au brouillon pour reporter vos connaissances : ABCD étant un rectangle, on sait des choses sur ses côtés, ses angles, ses diagonales... indiquez tout ce que vous savez sur votre figure et observez... il se peut que cela fasse naître des idées.

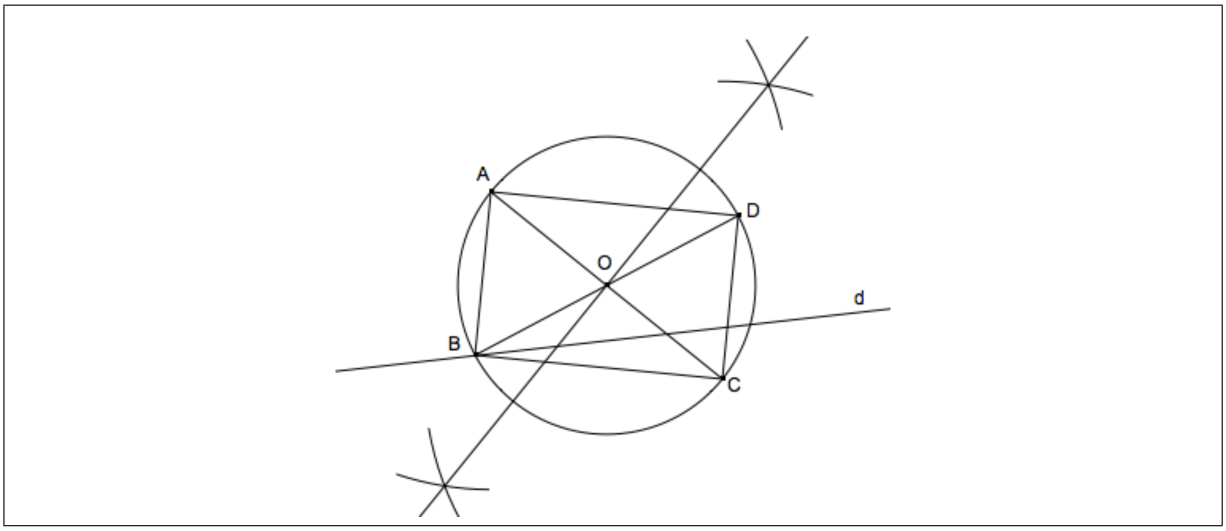
Indication 3

Parmi les propriétés du rectangle que vous connaissez, vous avez probablement retrouvé ce qui concerne ses diagonales : elles ont à la fois le même milieu (noté O sur le dessin) et la même longueur.



En observant ce schéma, vous allez peut-être trouver une façon de faire la figure cette fois dans l'ordre demandé : en plaçant d'abord la droite d et les points A et C.

Solution rédigée



Remarque : Comme il n'est demandé ni programme de construction ni justification, la figure se suffit à elle-même.

Les étapes de la construction sont les suivantes :

— Construire le milieu O de [AC]. On pouvait placer le milieu à la règle graduée, à 4 cm de A. Mais il arrive que les énoncés précisent de construire «à la règle non graduée et au compas». C'est ce que nous avons fait ici, nous reverrons ces constructions plus loin dans l'ouvrage.

— Tracer le cercle qui a pour diamètre [AC]. Ce cercle coupe la droite d en deux points, choisir un des deux points pour jouer le rôle de B.

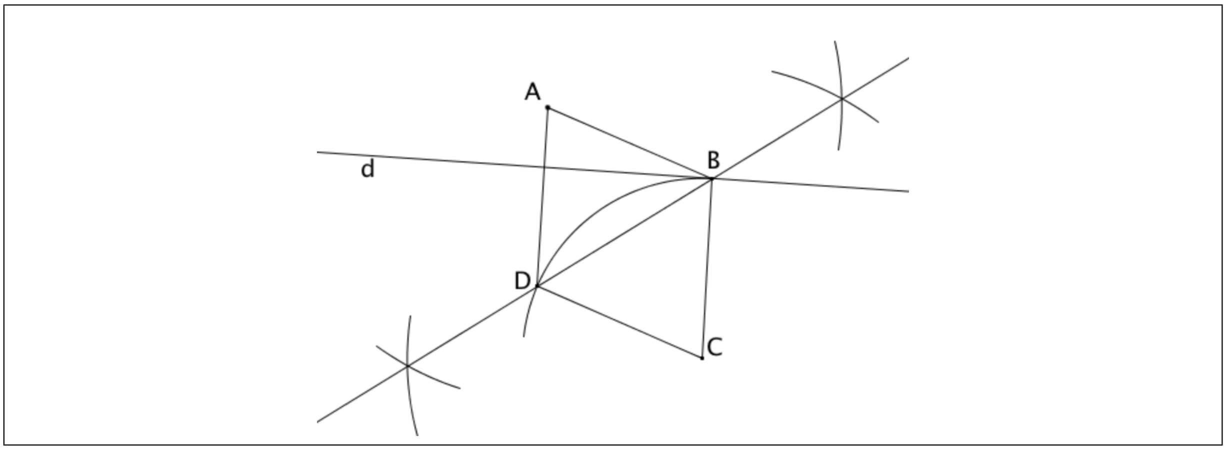
— La droite (BO) coupe le cercle en B et en un autre point, c'est ce point qu'on nommera D.

Il y a deux positions possibles pour le point B, il y a donc deux rectangles possibles. Comme la question n'en demandait qu'un seul, nous n'en avons tracé qu'un.

Problème jumeau

On donne une droite d et deux points A et C situés de part et d'autre de d et tels que AC = 8 cm. Construire un losange ABCD tel que le point B soit sur la droite d.

Solution rédigée



Remarque : Dans la plupart des cas il est possible de construire un losange le montre la figure ci-dessus. Cependant, si votre droite d est perpendiculaire à (AC), la médiatrice de [AC] et la droite d sont parallèles, il n'y a alors pas de losange possible. Exception dans l'exception, si votre droite d est la médiatrice de [AC], alors n'importe quel point de d peut être choisi comme point B.

Quels enseignements tirer de ces problèmes ?

Rappelons tout d'abord que les problèmes de ce voyage introductif sont difficiles. Si vous avez résolu sans aide la plupart d'entre eux, il est très probable que vous n'ayez pas besoin de ce livre.

Si au contraire vous avez eu beaucoup de mal à vous en sortir, y compris en ayant lu les indications, vous êtes normalement constitué.

Nous espérons que ce premier parcours vous aura convaincu d'un certain nombre de points qui se révèleront importants dans la suite de votre travail :

Il existe généralement plusieurs solutions pour un même problème.

Chercher un problème ne consiste donc pas à essayer de trouver LA solution, LA bonne façon d'écrire les choses.

Toute solution correctement expliquée est valable. Une solution n'utilisant aucune connaissance mathématique élaborée, mais correctement expliquée, n'est ni plus ni moins valide qu'une solution (un peu) plus technique, utilisant par exemple des équations. Comme il s'agit de recruter des professeurs d'école, la capacité à exprimer les choses simplement à partir de connaissances élémentaires bien maitrisées est même valorisée.

L'usage du brouillon est indispensable.

Nous avons déjà développé ce point dans les conseils généraux du début de l'ouvrage.

Les dessins, les essais au brouillon avec de petits nombres aident généralement à comprendre ce qu'on cherche, permettent parfois de trouver des pistes. Sauter cette étape où l'on met «les mains dans le cambouis» conduit souvent à la catastrophe, par exemple à effectuer pour le premier problème des calculs avec le nombre 4 n'ayant aucun sens.

Le croquis fait à main levée, en partant du résultat cherché, dans le problème de l'étape 6 ne garantit pas le succès, mais son absence ne laisse aucune chance d'aboutir.

Le travail au brouillon n'est pas une forme mal écrite de la solution finale, c'est une étape de travail préalable. Ce qu'on comprend à l'aide du brouillon doit ensuite être remis en forme pour le lecteur. La solution rédigée ne ressemble généralement pas du tout au brouillon.

Les connaissances nécessaires sont peu nombreuses, mais elles doivent être solides et facilement disponibles.

Peut-être certains lecteurs ont-ils utilisé précipitamment, lors de la deuxième étape, de vagues réminiscences de formules à propos des écritures sous forme de puissance... or ces formules sont inutiles ici. Elles sont même nuisibles si on a la conviction qu'il faut nécessairement utiliser une formule ce qui conduit souvent à inventer des formules ressemblant peu ou prou à ce qu'on a travaillé jadis, sans véritable conviction qu'elles sont vraies.

Les solutions proposées reposent sur deux idées seulement :

Il faut savoir ce que signifient des écritures telles que 5^{10}ou 2^{20}

Il faut savoir résumer une addition réitérée par une multiplication : $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$

La façon de procéder proposée pour ce problème demande un peu plus de temps que le recours aux formules mémorisées, mais elle évite d'inventer des formules fantaisistes.

Ce type d'exercice nous semble emblématique de l'esprit du travail à entreprendre : il ne s'agit pas de mémoriser des connaissances toujours plus nombreuses, mais de se concentrer sur quelques connaissances solides et bien comprises et d'apprendre à les mobiliser dans des circonstances variées.

Le droit à l'erreur n'est pas le droit d'écrire n'importe quoi.

On m'aborde dans la rue pour me demander comment se rendre au cinéma XYZ.

Si je sais où se situe le cinéma XYZ, je ferme les yeux, j'essaye d'imaginer le trajet puis j'annonce : « prenez la deuxième rue à gauche, avancez tout droit pendant environ un kilomètre puis tournez à droite au niveau de la boulangerie ».

Il se peut que l'itinéraire annoncé soit faux (en réalité c'est la troisième à gauche qu'il faut prendre, j'ai oublié une rue) j'ai alors commis une erreur, ce qui arrive aux meilleurs d'entre nous.

Si je ne sais pas où est le cinéma XYZ, je n'imite pas le cas précédent en fermant les yeux et en énonçant un itinéraire fantaisiste, je me contente de dire que je ne sais pas.

Proposer un itinéraire auquel je ne crois pas moi-même ne serait pas une erreur, mais une bêtise.

Malheureusement, le parcours mathématique scolaire douloureux de certains adultes les conduit à abandonner ce bon sens quand ils font des mathématiques.

C'est ainsi qu'on écrit parfois une égalité ou une phrase parce qu'elle ressemble à quelque chose qu'un professeur a écrit dans un exercice analogue, et non parce qu'on croit que cette phrase ou cette égalité est vraie.

S'il vous arrive, en mathématiques, d'écrire des phrases ou des étapes de calcul en ayant conscience qu'elles n'ont pas de sens pour vous, mais en espérant qu'elles en auront pour le correcteur vous ne faites pas de mathématiques, mais une caricature de mathématiques.

Abandonner le cas échéant ce type de comportement est probablement une des étapes les plus difficiles pour se réapproprier les mathématiques, c'est parfois une étape douloureuse, mais c'est indispensable et préalable à tout progrès véritable.

Il n'y a pas de critère permettant à un observateur de savoir, quand vous écrivez une phrase mathématique fausse, s'il s'agit d'une erreur ou d'une bêtise.

Vous seul pouvez savoir si en écrivant cette phrase vous aviez des raisons fortes de penser qu'elle disait la vérité. Si c'est le cas, vous avez commis une erreur, ce ne sera pas la dernière et ça ne pose aucun problème. En étudiant votre erreur avec l'aide d'un corrigé ou d'une personne plus expérimentée, vous pourrez souvent trouver ce qui ne va pas. Peut-être s'agit-il d'une erreur de calcul, ou bien vous avez oublié un cas, ou encore vous n'aviez pas bien compris un concept mathématique… et ce sera l'occasion de le retravailler. Parfois il s'agit d'une simple étourderie sans signification particulière, mais, très souvent, chercher et corriger ses erreurs est un excellent moyen de progresser.

Bien entendu, si votre écrit était juste destiné à ressembler à ce que vous supposez que les correcteurs du concours attendent, sans que vous ayez cherché à écrire quelque chose de vrai, ce retour sur votre production ne vous servira à rien.

Cela entraine le rappel d'un conseil déjà donné : n'effacez jamais vos recherches et vos brouillons. Effacer une tentative infructueuse empêche de retrouver l'erreur éventuelle et assure de la commettre à nouveau lors de la tentative suivante.