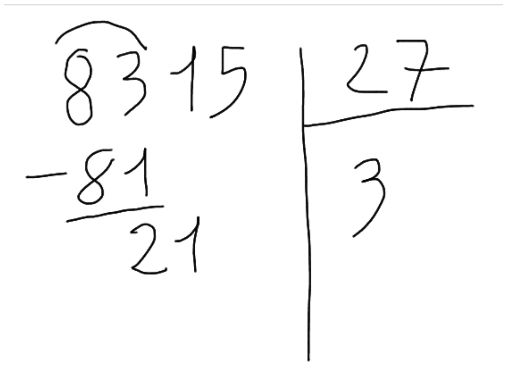
Deux méthodes pour la division posée

Observons un élève moyen de CM pendant qui pose la division ci-contre.



L'étape où il est parvenu comporte un très grand risque d'erreur.

À ce stade, de nombreux élèves tiendront un discours proche de ceci :

"21 c'est plus petit que 27, alors je prends trois chiffres, j'abaisse le 5 et je me demande en 215 combien de fois 27".

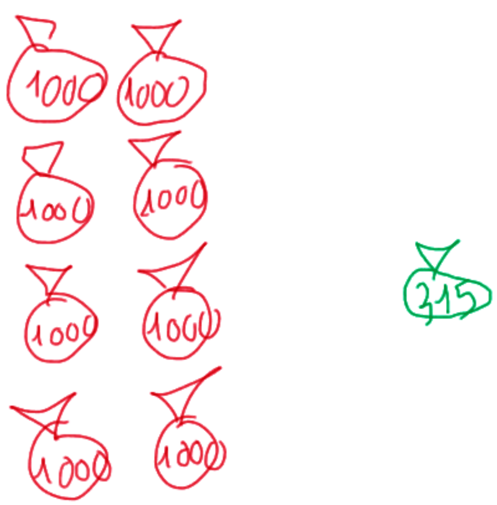
Le quotient trouvé sera alors de 37 et non 307.

Nous vous proposons ci-dessous deux façons de poser et décrire la division qui diminuent le risque d'erreur en supprimant deux phases magiques de la façon traditionnelle de dire la division :

- "*27 a deux chiffres, alors je prends les deux premiers chiffres de 8315.*
- "*...et j'abaisse le 1...*"

Première version : partager les paquets.

Diviser 8315 par 27, ça revient à partager 8315 billes entre 27 enfants (en donnant autant de billes à chaque enfant).



Combien chaque enfant aura-t-il de billes ?

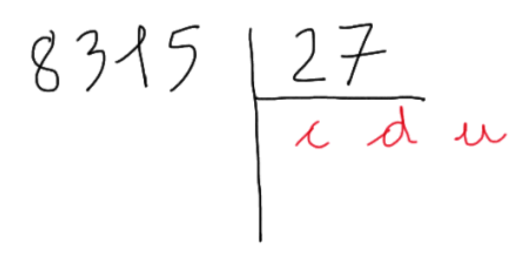
Dans 8315, le chiffre 8 désigne des paquets de 1000, alors je commence par essayer de partager des paquets de 1000 billes.

Il n'y a pas assez de paquets de 1000 billes pour en donner à chaque enfant. Je casse donc tous les paquets de 1000 billes pour obtenir des paquets de 100 billes.

8 milliers c'est 80 centaines, alors 8315 billes, c'est 83 paquets de 100 billes et 15 billes isolées.

83, c'est plus que 27, je pourrai donner des paquets de 100 billes à chaque enfant.

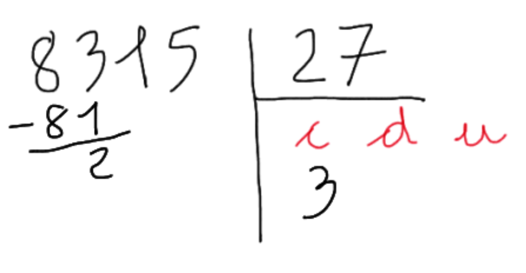
Le nombre de billes que recevra chaque enfant aura donc un chiffre des centaines, je peux préparer mon quotient en écrivant c d u (pour centaines, dizaines, unités).



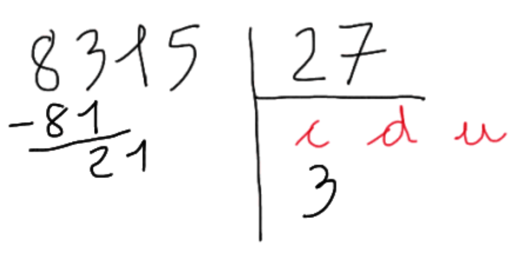
Combien de centaines de billes puis-je donner à chaque enfant ?

27 fois 2 c'est 54, 27 fois 3 c'est 81. Je peux donner 3 centaines à chacun.

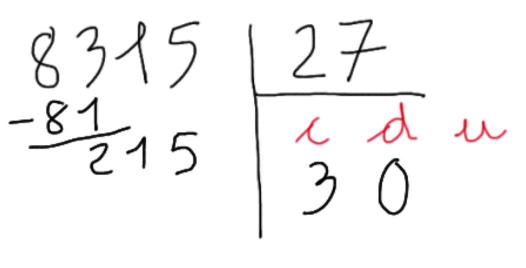
J'écris "3" dans la colonne des centaines, et je soustrais les 81 centaines distribuées des 83 centaines que j'avais au départ.



Il me reste 2 centaines de billes et 15 billes à partager je ne peux plus en distribuer, alors je les transforme en 20 dizaines.
215 billes, c'est 21 dizaines de billes et 5 billes.



21 dizaines, ce n'est pas assez pour donner une dizaine à chaque enfant.
J'écris 0 comme chiffre des dizaines du quotient.

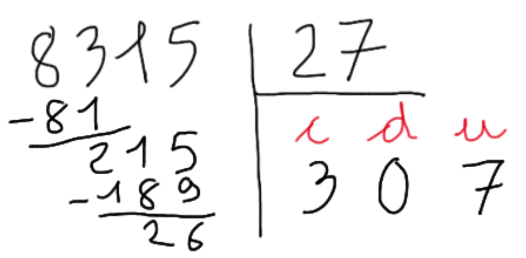


Comme je ne peux pas donner de dizaine à chaque enfant, je partage directement les 215 billes.

27 fois 4 c'est 108.   27 fois 8 c'est le double, de 27 fois 4 c'est 216. Comme je n’ai que 215 billes, je ne peux pas en donner 8 à chaque enfant.
je pourrai donner seulement 7 billes à chaque enfant.

J'écris 7 comme chiffre des unités du quotient.

27 fois 7, c'est 189. Je pose la soustraction pour savoir combien de billes non distribuées il reste.



Chacun des 27 enfants aura 307 billes et il restera 26 billes non partagées.

Pour finir, mais ceci est commun à toutes les méthodes de division, il est préférable de vérifier en posant la multiplication qu'on a bien :

$$(27 \times 307) + 26 = 8315$$

Ce qui revient à dire qu'avec les 27 parts de 307 billes chacune plus les 26 billes qui ne sont pas distribuées, on retrouve bien les 8315 billes qu'on avait au début.

Aménagements possibles :

Les dessins des paquets de différentes tailles (1000, 100, 10) sont utiles au moment de l’apprentissage, mais ils alourdissent considérablement l'écriture. On s'en passe dès que possible.

Les multiplications peuvent être posées à côté quand elles sont trop difficiles à faire de tête (ce qui dépend évidemment de l'élève). On peut aussi calculer les multiples de 27 avant de commencer à poser la division.

L'écriture des retenues dans les soustractions est nécessaire pour la plupart des élèves, nous ne les avons pas écrites dans l'exemple, car les méthodes de soustraction sont elles-mêmes variées : chacun posera les soustractions comme il en a l’habitude.

Certains préfèrent prévoir un chiffre des milliers au quotient (il y a 8 milliers qu'on cherche à partager) et écrivent d'entrée m c d u ... quitte à constater que le chiffre des milliers est zéro et qu'on peut ne pas l'écrire. Nous n'en voyons pas l'utilité, mais ça ne compromet en rien la méthode.

Avantages de cette méthode :
Elle utilise beaucoup la compréhension du système décimal de position et les différentes décompositions possibles d'un nombre à partir de son écriture.
C’est difficile, mais le travail ainsi fait à chaque division sur l'écriture décimale est plus profitable que les questions rituelles comme "Quel est le chiffre des centaines de 8315 ?" ou "Quel est ne nombre de centaines dans 8315 ?"

Chaque étape a une signification dans l'histoire qu'on se raconte, les étapes magiques du type "et j'abaisse le 1" ont disparu. En particulier, quand on écrit un chiffre au quotient, on sait s'il s'agit de centaines de dizaines ou d'unités. C'est ce qui contribue à rendre moins fréquente l'erreur décrite au début de ce document. Dans certaines techniques de division posée, on écrit les chiffres sans savoir du tout ce qu'ils représentent, on découvre seulement à la fin que le 3, premier chiffre du quotient, est le chiffre des centaines.

La trace écrite est pratiquement identique à celle de la méthode qui était la plus fréquente il y a 20 ou 30 ans, ce qui contribue à rassurer les parents... mais il n'est pas absolument certain que ce soit un avantage : comme il y a peu de différences à l'écrit, les parents, pour aider leurs enfants vont décrire la division telle qu'ils l'ont apprise. L'élève risque alors d'être confronté à deux discours radicalement différents pour décrire la même opération. Une information des parents s'impose certainement.

Limites et inconvénients de cette méthode :
Elle s'appuie sur la signification "partager 8315 billes entre 27 personnes" or, en restant dans le contexte des billes, la même division sert aussi à trouver combien on peut faire de paquets de 27 billes avec 8315 billes.
Cette méthode ne peut pas se décrire en s'appuyant sur la signification "combien de paquets". Cela gênera certains élèves qui auront du mal à accepter qu’elle est encore pertinente dans les problèmes où on cherche le nombre de groupements qu'on peut réaliser et non la valeur d’une part.

Quand le dividende et le diviseur sont du même ordre de grandeur, par exemple pour effectuer 3419 par 817, la méthode, conduit à un discours lourd et qui apporte peu : pour partager 3419 billes entre 817 enfants, je ne peux donner ni millier, ni centaine, je dois donc partager les 3419 billes entre les 817 enfants...belle lapalissade.
On est alors conduit à essayer les produits de 817 par différents nombres à 1 chiffre... comme avec les autres méthodes.

Deuxième version

Cette technique se décline en deux sous-versions selon le problème qu'on se pose.

Si on cherche à déterminer combien de billes aura chaque enfant dans un partage de 8315 billes entre 27 enfants, toutes les multiplications seront dites sous la forme "vingt-sept fois xxx".

Si on cherche à trouver combien de paquets de 27 billes on peut faire avec 8315 billes, on dira plutôt "xxx fois vingt-sept".

C'est pourquoi la suite comporte deux transcriptions du discours qui décrit le calcul. La trace écrite est commune aux deux versions

$$10 \times 27 = 270$$
$$100 \times 27 = 2700$$
$$1000 \times 27 = 27000$$

Si on cherche la part de chaque enfant.

27 fois 10 c'est 270, c'est moins que 8315, on peut donner plus de 10 billes à chaque enfant.

27 fois 100 c'est 2700, c'est moins que 8315, on peut donner plus de 100 billes à chaque enfant.

27 fois 1000 c'est 27000, c'est plus que 8315, on ne peut pas donner 1000 billes à chaque enfant.

Je sais que le nombre de billes pour chaque enfant est au moins 100, mais plus petit que 1000.

Si on cherche combien de paquets on peut faire.

10 fois 27 c'est 270, c'est moins que 8315, on peut faire plus de 10 paquets.

100 fois 27 c'est 2700, c'est moins que 8315, on peut faire plus de 100 paquets.

1000 fois 27 c'est 27000, c'est plus que 8315, on ne peut pas faire 1000 paquets.

Je sais que le nombre de paquets que l'on pourra faire est au moins 100, mais plus petit que 1000.

$27 \times 1 = 27$
$27 \times 2 = 54$
$27 \times 3 = 81$
$27 \times 4 = 108$
$27 \times 5 = 135$
$27 \times 6 = 162$
$27 \times 7 = 189$
$27 \times 8 = 216$
$27 \times 9 = 243$

L’écriture d’une table des multiples de 27 (ou de certains d’entre eux seulement) avant de poursuivre peut soulager la charge de calcul mental.

Je cherche maintenant si on peut donner 200, 300, 400, 500…billes à chaque enfant.

27 fois 2 font 54, 27 fois 200 font 5400. On peut donner 200 billes à chaque enfant.

Comme 27 fois 3 font 81, 27 fois 300 font 8100. On peut donner 300 billes à chaque enfant.

27 fois 4 font 108, 27 fois 400 font 10800. On ne peut pas donner 400 billes à chaque enfant.

J'écris que chaque enfant a 300 billes et je calcule combien il reste de billes à donner.

Je cherche maintenant si on peut faire 200, 300, 400... paquets.

2 fois 27 font 54, 200 fois 27 font 5400. On peut faire 200 paquets.

3 fois 27 font 81, 300 fois 27 font 8100. On peut faire 300 paquets.

Comme 4 fois 27 font 108, 400 fois 27 font 10800. On ne peut pas faire 400 paquets.

J'écris qu'on fait 300 paquets et je calcule combien il reste de billes à mettre en paquets.

$$\begin{array}{r|l} 8315 & 27 \\ \cline{2-2} -8100 & 300 \\ \hline 215 & \end{array}$$

Il reste 215 billes à partager.
En regardant la table de 27, je constate qu'on peut encore donner 7 billes à chaque enfant, mais qu'on ne peut pas en donner 8.

J'écris qu'on donne encore 7 billes à chaque enfant puis je calcule le nombre total de billes pour chaque enfant et le nombre de billes restantes.

Il reste à vérifier que 27 fois 307 billes, plus les 26 billes restantes, cela fait bien 8315 billes.

Il reste 215 billes à grouper.
En regardant la table de 27, je constate qu'on peut encore faire 7 paquets, mais qu'on ne peut pas en faire 8.

J'écris qu'on fait encore 7 paquets puis je calule le nombre total de paquets et le nombre de billes restantes.

Il reste à vérifier que 307 fois 27 billes, plus les 26 billes restantes, cela fait bien 8315 billes

$$\begin{array}{r|l} 8315 & 27 \\ \cline{2-2} -8100 & 300 \\ \cline{1-1} 215 & +\ \ \ 7 \\ -189 & \\ \cline{1-2} 26 & 307 \end{array}$$

$$(27 \times 307) + 26 = 8315$$

Aménagements possibles :

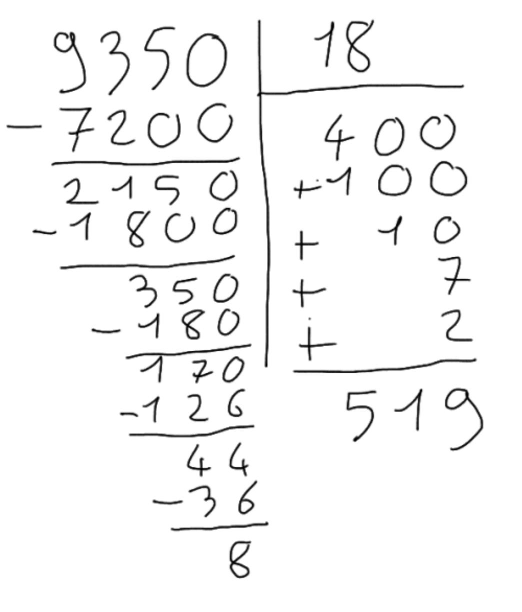
On peut alléger les écritures, par exemple en traitant mentalement les multiplications par 10, 100, 1000.
On peut aussi n'écrire que les produits nécessaires et difficiles à effectuer de tête dans la table de 27

Avantages de cette méthode :

Elle se décrit facilement conformément au problème posé, que l'on cherche la valeur d'une part ou le nombre de groupements possibles. La conviction que la même opération est légitime pour ces deux types de problèmes qui semblent à priori différents en est renforcée.

Comme pour la méthode précédente, chaque étape a une signification dans l'histoire qu'on se raconte, les étapes magiques du type "et j'abaisse le 1" ont disparu.

La méthode est en partie autocorrective : si un des chiffres du quotient est sous-estimé, cela n'affecte pas le résultat final comme le montre l'exemple ci-dessous.



Limites et inconvénients de cette méthode :

Les traces écrites sont lourdes.
On peut évidemment ne pas écrire toutes les multiplications, mais si on n'écrit pas la table de 27, les opérations mentales sont plus complexes que dans d'autres méthodes : il ne suffit pas de calculer 4 x 27 ou 5 x 27, il faut en déduire 400 x 27 ou 500 x 27. Le faire entièrement de tête est très formateur pour ceux qui en sont capables, mais risque de mettre en difficulté d'autres élèves.

La trace écrite s'éloigne de celle que les parents d'élèves ont pu connaitre ce qui demandera quelques explications. On peut aussi voir cette différence comme un atout : elle signale que la méthode est différente, le risque de plaquer sur le même écrit deux discours radicalement différents à l'école et à la maison est moindre qu'avec la première méthode.