Présentation des problèmes d'optimisation

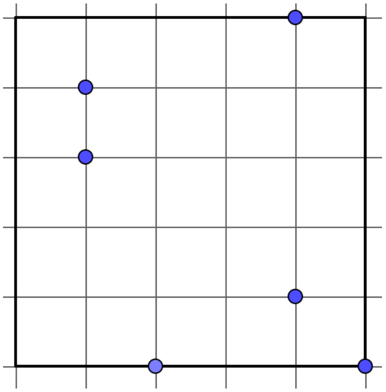
Deux exemples

La rubrique « optimisation » propose 27 problèmes et des indications détaillées pour les mettre en œuvre au cycle 3. Les problèmes que nous proposons sont peu conventionnels, nous suggérons donc au lecteur de consacrer quelques minutes à chercher deux problèmes qui auraient pu figurer dans cette rubrique avant de lire la suite.

Pas deux fois la même longueur

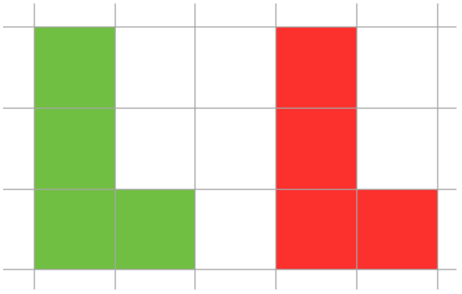
Placez des points sur les intersections de cette grille. Il doit être impossible de tracer deux segments de même longueur en joignant les points placés.

Le but est de placer le plus possible de points.



Cette figure montre une tentative de placer 6 points… il est malheureusement possible de tracer deux segments de même longueur, elle ne convient donc pas.

Deux L



En dessinant sur la grille deux L majuscule constitués de 4 cases, obtenir le plus possible de figures différentes.

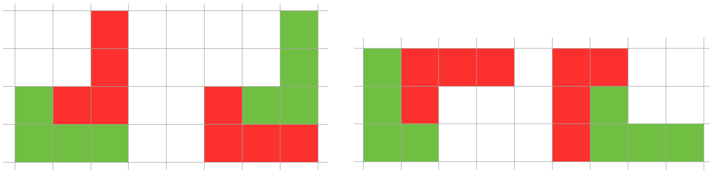
Pour que le nombre de figures possibles ne soit pas trop élevé, nous proposons d'adopter les conventions suivantes :

— Les figures où les deux L ne se touchent pas, ou se touche seulement en un point ne sont pas acceptées. Les deux L doivent se toucher au moins par un côté de carreau, sans toutefois se superposer.

— Deux figures obtenues en échangeant la place du L rouge et du vert sont considérées comme identiques.

— Deux figures qui peuvent se superposer après déplacement ou retournement sont considérées comme identiques.

Ainsi, l'illustration qui suit montre quatre aspects de la même figure.



La plupart des problèmes proposés sont des problèmes d'optimisation. Il s'agit comme dans « Pas deux fois la même longueur » de trouver une configuration aussi bonne que possible de points, de nombres ou de figures géométriques en respectant des contraintes.

4 problèmes consistent comme dans « Deux L » à trouver le plus possible de figures différentes en respectant une règle de fabrication.

Les mathématiques comme œuvre collective

Un élève seul ne peut généralement pas trouver la solution complète d' un des problèmes proposés dans cette rubrique

Dans la recherche des « Sykaros » Nathalie a l'idée de partir des pentaminos et de leur ajouter un carré, mais c'est Sélim qui trouve les 12 pentaminos. Aïsha applique l'idée de Nathalie à la collection trouvée par Sélim et Félix montre qu'on retrouve souvent le même sykaro à partir de deux pentaminos différents. Sarah élimine tous les doublons signalés par Félix et Malo supprime un dernier doublon (un sykaro trouvé deux fois à partir d'un même pentamino) .

Dans « des sommes pas trop grandes », Lilou trouve la première une solution optimale où la plus grande des 8 sommes est égale à 34, mais Sacha a expliqué auparavant qu'on ne fera jamais mieux que 34. Mila a trouvé un exemple où la plus grande des 4 sommes par ligne est 34 et Moshin a montré comment améliorer certains exemples en intervertissant la position de deux nombres.

Ces résumés fictifs sont typiques de ce qui peut se produire dans une classe s'attaquant à un problème de cet ouvrage : l'élève qui trouve la solution complète ou optimum ne fait que poser la dernière brique. Il s'appuie sur des tentatives antérieures, rapproche des idées émises par différentes personnes, corrige un essai inspiré, mais comportant une erreur...

Qu'on y prenne garde : les problèmes par eux-mêmes n'imposent pas une attitude bienveillante valorisant la contribution de chacun des élèves de la classe. Ils sont compatibles avec une vision élitiste survalorisant l'auteur de la meilleure réponse. Cela serait évidemment regrettable d'un point de vue humain, mais ce serait également un frein au développement de la pensée mathématique dans la classe.

Les idées fructueuses naissent plus facilement dans un climat de confiance et de coopération où chacun partage ses découvertes et s'enrichit de celles des autres.

Elles se développent plus facilement si chacun est capable de critiquer une affirmation sans la rejeter entièrement (un résultat peut par exemple être faux à cause d'une erreur de calcul, mais s'appuyer sur une procédure prometteuse) et bien entendu sans porter de jugement sur les personnes.

Le rôle de l'enseignante est essentiel sur ce point.

Apprendre des mathématiques et à faire des mathématiques

Apprendre les mathématiques c'est à la fois apprendre des concepts et des faits (transmission d'une culture, de résultats importants ou remarquables, de conventions...) construire des automatismes (techniques opératoires, tables d'addition et de multiplications...) et se forger une attitude favorable (esprit critique, confiance en soi, capacité à reformuler, initiative...).

Il n'existe aucune méthode assurant de manière absolue que des élèves soient intelligents ou « forts en maths ».

Néanmoins, on peut postuler qu'on aide les enfants à développer leur intelligence en les considérant comme intelligents et en se comportant avec eux avec intelligence.

Ce postulat s'applique parfaitement aux mathématiques : on aide les enfants à développer leurs capacités mathématiques en les considérant comme capables de pratiquer intelligemment les mathématiques et en se comportant avec eux en praticien intelligent des mathématiques.

De ce point de vue également le rôle de l'enseignante est essentiel. C'est elle qui décide à chaque instant s'il est opportun de fournir une information ou s'il vaut mieux laisser les élèves chercher encore par eux-mêmes.

Il est clair que les élèves ne peuvent pas découvrir par eux-mêmes toutes les connaissances mathématiques dont ils ont besoin : l'enseignante doit fournir des informations et des explications.

Il est tout aussi clair qu'il ne suffit pas d'exposer des connaissances pour que les élèves se les approprient : les élèves doivent avoir l'occasion de chercher, de se confronter à des problèmes qui rendent nécessaires les connaissances nouvelles.

La mise en application de ces principes n'est pas simple pour un élève seul et moins encore dans une classe, puisque chaque élève est différent.

L'enseignante peut préférer exposer des connaissances ou au contraire être plus à l'aise pour organiser et faciliter la recherche par les élèves. C'est parfaitement légitime tant qu'aucun des deux rôles n'est complètement abandonné.

Des problèmes difficiles, mais dans lesquels il est facile d'entrer

Poser ou non des problèmes de recherche à l'école élémentaire est un choix difficile. Les deux dérives suivantes doivent être évitées :

— Si l'on n'en propose pas, les mathématiques peuvent se réduire à un ensemble de faits à mémoriser, de techniques à exercer... cela n'est pas très stimulant intellectuellement et risque de dégouter des mathématiques.

— Si l'on en propose et qu'ils sont d'un abord trop difficile, seuls les meilleurs élèves en tireront profit. Les autres se conforteront dans l'idée qu'ils ne sont pas bons en maths, que cette discipline est réservée à une élite de gens doués.

La présentation particulière des problèmes de cet ouvrage permet de dépasser cette apparente contradiction.

Dans le problème « no three in a line », au lieu de demander « combien de points peut-on placer sur cette grille sans qu'il y ait trois points alignés ? », on demande de placer effectivement des points sur la grille sans en aligner trois.

Ce simple remplacement d'une question par une consigne d'action introduit des changements considérables.

Il est en effet facile de placer quelques points, de vérifier qu'il n'y a pas d'alignement... puis d'essayer d'ajouter un autre point.

Ainsi un élève qui ne place que 5 points a tout de même effectué un travail correct (peut-être excessivement prudent).

On évite ainsi les phénomènes classiques de découragement ou de réponse au hasard.

De la même façon, dans « Les sykaros » on ne demande pas combien de figures différentes on peut obtenir en assemblant 6 carreaux par leurs côtés, mais on fait dessiner une collection de ces figures.

La question que nous avons supprimée de la consigne fait son retour quand la recherche est déjà bien entamée.

Si on réussit à placer 9 points sans en aligner 3, il est naturel de se demander si on peut faire mieux.

Si on a trouvé 33 sykaros différents, il est naturel de se demander s'il en existe d'autres.

Quels contenus mathématiques sont abordés ?

Les problèmes de cette rubrique ne couvrent pas l'ensemble du programme de mathématiques du cycle 3 et ne sauraient donc constituer une méthode. Ils donnent toutefois l'occasion de progresser dans plusieurs aspects des mathématiques, en particulier :

— S'entrainer au calcul (spécialement au calcul mental et réfléchi)

— Préciser certains concepts (points alignés, aire)

— Distinguer ce qui parait probable de ce qui est certain (parce que prouvé)

— Mettre en évidence et entrainer certains « gestes » mentaux propres aux mathématiques : s'organiser pour envisager tous les cas, reformuler une question.

— Argumenter et comprendre l'argumentation d'autrui

Mode d'emploi des problèmes

Poser le problème

Il est indispensable que l'enseignante prenne le temps de chercher elle même le problème qu'elle va poser aux élèves.

Cependant, il n'est pas nécessaire que l'enseignante connaisse la totalité des réponses, sa compétence particulière consiste plutôt dans la rigueur de la vérification, l'aide à l'organisation (classement des propositions dans les situations « musée », mise en évidence de possibilités non explorées...)

Les problèmes sont formulés d'une façon aussi proche que possible de ce que l'on peut dire aux élèves. Dans la réalité de la classe, il faudra cependant souvent ajouter des exemples à ceux que nous proposons, ou reformuler une phrase qui n'a pas été bien comprise.

Tous les problèmes commencent par une phase de recherche d'exemples (des figures, des suites de nombres, une disposition particulière de points...). Dans cette première phase, l'enseignante s'assure surtout que le problème est compris par tous.

Cette phase est suivie d'une alternance de mises en commun pour tout le groupe classe et de nouveaux temps de recherche.

Les phases de mise en commun

Si les propositions sont nombreuses, l'enseignante évite de faire venir au tableau les élèves à tour de rôle.

Chacun reproduit sa proposition sur une feuille volante portant son nom. Les feuilles sont dispersées dans la classe autant que possible (sur les vitres, le bureau, le tableau, les parois).

Les élèves circulent, observent et notent sur leurs brouillons leurs remarques. Cette phase de prise de connaissance ne doit pas être trop longue, il n'est pas grave que chaque élève n'ait pas vu toutes les propositions.

La mise en commun proprement dite commence ensuite : on signale les propositions qui ne répondent pas à la consigne, mais aussi celles qui sont particulièrement remarquables.

Il arrive que des élèves mettent en évidence de bonnes idées dans les propositions affichées, mais, surtout en début d'année, ce rôle reviendra souvent à l'enseignante. Dans la description de chaque problème figure une rubrique « éléments de relance » dans laquelle l'enseignante puisera à sa guise.

Comme nous l'avons déjà évoqué, décider s'il convient de laisser les élèves chercher encore un peu seuls ou s'il est préférable de leur fournir une indication est un des rôles importants de l'enseignante.

Les phases de recherche d'exemple

Nous ne sommes partisans ni d'un travail strictement individuel ni d'un travail purement en groupe.

Les élèves doivent pouvoir échanger, s'entraider, vérifier réciproquement leurs propositions. Cependant, chacun garde la responsabilité de sa production, il n'est pas nécessaire de se mettre d'accord dans un groupe. Si un désaccord est clairement exprimé dans un groupe, c'est le désaccord lui-même qui mérite d'être exposé dans la mise en commun suivante :

— Louis pense qu'il a trouvé une figure sur laquelle l'élastique ne mesure que 19 cm, mais Aisha pense que la figure de Louis ne respecte pas la règle du problème. Nous allons observer la figure de Louis. . .

Une approche prudente de la preuve mathématique

Pour chaque problème vient un moment où la classe ne parvient plus à trouver des exemples meilleurs que les précédents. La question se pose alors naturellement : est-il possible de faire mieux ?

À cette question, les réponses spontanées des élèves sont rarement dans le registre mathématique. On obtiendra plutôt des réponses ressemblant à :

- Nous avons déjà beaucoup cherché et nous ne réussissons pas à faire mieux (j'ai même demandé à mon grand frère qui est au lycée), alors c'est impossible de faire mieux.
- Si on est patient et appliqué, on finit toujours par réussir alors en continuant, on finira par trouver mieux.

Il n'est pas indispensable d'approfondir la question « est-il possible de faire mieux ? » pour chaque problème. Cependant, l'enseignante indique clairement à la fin du temps consacré à un problème ce que l'on sait et ce que l'on ne sait pas.

Si le problème « Pas deux fois la même longueur » était posé dans une classe, la conclusion contiendrait au moins les deux éléments suivants :

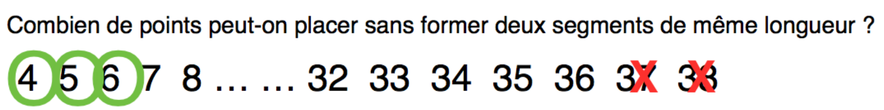
Une affirmation du type « nous savons placer 6 points sans former de segments de même longueur » accompagnée d'un ou plusieurs exemples.

La phrase « nous ne savons pas si on peut faire mieux ».

Pour certains problèmes, il est possible de fixer une limite à ce qu'on peut espérer. Dans ce cas, la présentation du problème comporte une rubrique « éléments de preuve ».

Parfois, le premier de ces « éléments de preuve » peut être perçu par un adulte comme sans intérêt parce que totalement évident.

Pour « pas deux fois la même longueur », l'enseignante pourrait par exemple commencer par reproduire au tableau le schéma suivant en le commentant :



Les ronds verts indiquent ce qu'on sait faire.

Les croix rouges indiquent ce qui est impossible. Personne ne pourra jamais placer 37 ou 38 points sans former deux segments de même longueur. . . parce qu'il n'y a que 36 emplacements. Même une équipe de grands savants mathématiciens ne peut pas mettre 37 points là où il n'y a que 36 places.

Ce genre d'affirmation fait rire les élèves, mais replace l'échange dans le domaine des mathématiques. Elle donne peu d'informations, mais sort du registre de la croyance, de l'opinion, voire de la morale des réponses spontanées citées plus haut.

Parfois, la première « preuve » extrêmement faible proposée par l'enseignante suffit à lancer un processus. Dans notre exemple, un élève pourrait compléter en indiquant que 36 n'est pas possible non plus : il n'y a qu'une seule façon de placer 36 points, en occupant tous les emplacements et on constate qu'on peut tracer de nombreux segments de même longueur.

Pour certains problèmes, mais pas tous, on peut aller jusqu'à une résolution complète : on sait placer 11 étiquettes sur la grille et on sait qu'il est impossible d'en placer 12.

Le plus souvent, la conclusion (provisoire) ressemblera à ceci (exemple adapté au problème « pas de carré »)

7 8 9 10 11 12 ~~13~~ ~~14~~

Nous savons placer 10 points sur la grille sans former de carré.
Nous savons qu'il est impossible d'en placer 13.
Pour 11 et 12 nous ne savons pas si c'est possible.

Les mathématiques comme outil de gestion de la classe : le classeur de recherches

Tous les problèmes de cette rubrique (ou d'autres ayant les mêmes caractéristiques provenant d'autres sources ou inventés par l'enseignante) qui ont été abordés en classe peuvent êtres consignés dans un classeur de recherche collectif

Pour chaque problème d'optimisation, on y trouve :

- L'énoncé
- L'état des recherches schématisé comme dans le cadre ci-dessus
- Quelques productions d'élèves et éventuellement quelques productions de l'enseignante.

Pour les problèmes de type « musée », on trouve :

- L'énoncé
- l'ensemble des propositions différentes, de préférence classées par « familles ».
- L'état de la recherche sous la forme de l'une de ces deux phrases :
  - Nous ne savons pas si nous avons trouvé tous les xxxxxxx
  - Nous avons trouvé tous les xxxxxxxx.
    Le deuxième cas est rare. Il ne suppose pas seulement d'avoir longuement cherché sans parvenir à trouver de nouvel exemple : il faut avoir prouvé que c'est impossible.

Le classeur est accessible à tout moment pour les élèves qui ont terminé la tâche prescrite, ce qui aide beaucoup à ce que les élèves les plus rapides ne gênent pas les autres dans leur travail.

Cependant, il est utile de prendre périodiquement un temps où tous chaque élève reprend la recherche sur un problème de son choix afin d'éviter que les problèmes deviennent l'affaire exclusive des plus rapides.