Chapitre 6

La démonstration en géométrie

Les questions du type « démontrez que le quadrilatère ABCD est un losange » ou « démontrez que le point A est le milieu de [BC] » sont fréquentes au concours.

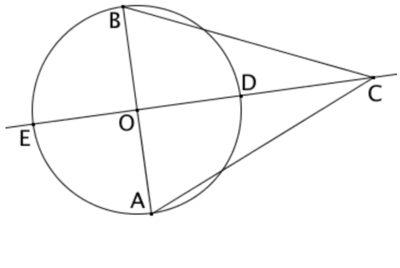
Dans cette partie, nous allons d'abord préciser les règles implicites de ce type de question. Nous donnerons ensuite quelques indications sur la façon d'aborder ce type de question, puis sur la façon de rédiger la réponse. Nous donnerons ensuite une liste des propriétés les plus fréquemment utilisées, ainsi que des indications sur la façon de les mémoriser.

Qu'est-il attendu quand on vous demande de démontrer ?

Voici un exemple de problème de démonstration :

ABC est un triangle isocèle en C. On trace le cercle de diamètre [AB], on appelle O son centre. La droite (CO) coupe le cercle en D et E. Démontrer que AE = AD

Et voici maintenant une solution qui serait acceptée (ce n'est évidemment pas la seule possible).



— O est le centre du cercle de diamètre [AB] donc O est le milieu de [AB], il est donc sur la médiatrice de [AB].
— Le triangle ABC est isocèle en C, donc CA = CB.
— CA = CB donc C est sur la médiatrice de [AB].
— La médiatrice de [AB] passe par O et C, c'est donc la droite (OC).
— (OC) est la médiatrice de [AB] donc (OC) et (AB) sont perpendiculaires (on peut dire aussi que (DE) et (AB) sont perpendiculaires).
— [AB] et [DE] sont deux diamètres du même cercle, donc ils ont le même milieu.
— Dans le quadrilatère ADBE, les diagonales [AB] et [DE] ont le même milieu et sont perpendiculaires, donc ADBE est un losange.
— ADBE est un losange donc AE = AD.

Quelles sont les caractéristiques que doit présenter un texte de démonstration pour être considéré comme correct ?

— Le texte doit être facilement lisible et pour cela, de préférence découpé en étapes courtes.
— Il comporte toujours des « répétitions », car un même fait est généralement cité une première fois quand on le démontre et au moins une seconde fois pour prouver autre chose.
  À la première ligne de l'exemple ci-dessus, on prouve que O est sur la médiatrice de [AB]… et on utilise ce fait à la quatrième ligne.
— Chaque étape doit prouver un fait nouveau, en s'appuyant sur :
  — Les informations données dans le texte ou prouvées aux étapes précédentes.
  — Une propriété connue clairement identifiable.

Cette troisième caractéristique soulève au moins deux questions :

— Quelles sont les propriétés que l'on peut utiliser ?

Celles qui sont citées plus loin. Des propriétés inventées pour l'occasion, parce qu'elles vous arrangent, et ne figurant pas dans cette liste ne seront pas acceptées, même si elles sont vraies. Il peut paraître choquant qu'on refuse en mathématique l'usage de propriétés vraies, mais si toute propriété vraie était acceptée, il suffirait de recopier l'énoncé, en le reformulant éventuellement un peu et d'affirmer que dans ces conditions la propriété qu'on cherche à démontrer est vraie.

Voici un exemple d'une telle reformulation pour le problème qui nous sert d'exemple. Ce qui est dit est vrai, mais ce n'est pas une démonstration : « On considère un cercle et un triangle isocèle dont la base est un diamètre du cercle. La droite passant par le sommet principal du triangle isocèle et le centre du cercle coupe le cercle en deux points, chaque extrémité de la base est équidistante de ces deux points ».

Il est donc indispensable à toute communauté mathématique de s'entendre sur les théorèmes supposés connus que l'on peut utiliser dans une preuve. Pour le concours de professeurs des écoles, ces théorèmes sont ceux qui sont enseignés au collège. Le jury n'est pas borné, si vous utilisez à bon escient un théorème que vous avez appris au lycée, il l'acceptera certainement… non sans avoir remarqué que vous utilisez des outils plus compliqués qu'il n'est nécessaire.

— Faut-il absolument citer le théorème qu'on utilise ?

Non, non, et non. Cela vous prendrait beaucoup de temps et n'améliorerait pas du tout la lisibilité de votre démonstration, qui serait considérablement rallongée. La troisième étape de la démonstration précédente deviendrait ainsi :

Quand un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment, or C est équidistant des extrémités A et B du segment [AB] donc C est sur la médiatrice de [AB].

Bien entendu, cela serait accepté par le jury, mais cela ne vous rapporterait rien de plus que la version que nous avons choisie.

Notre suggestion de laisser le théorème utilisé implicite ne dispense pas le rédacteur de savoir avec précision quel est ce théorème. Par exemple, quand nous écrivons « CA = CB donc C est sur la médiatrice de [AB] » nous donnons exactement les éléments nécessaires pour appliquer le théorème « Quand un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment », ni plus ni moins. Si on rajoute dans la phrase des éléments qui n'ont rien à voir avec ce théorème en écrivant par exemple « CA = CB et [AB] est le diamètre du cercle donc C est sur la médiatrice de [AB] » on donne à penser qu'on ne sait pas vraiment quel théorème est en jeu (celui qui sert n'a rien à voir avec un cercle) et la preuve n'est pas validée.

Les propriétés qu'il faut connaître

Les propriétés figurant en italique dans la liste qui suit méritent selon nous une attention particulière, car elles sont d'un usage fréquent et souvent mal connues. Bien que déjà longue,la liste est incomplète pour plusieurs raisons.

Les théorèmes de Pythagore et de Thalès sont présentés dans un autre chapitre.

Nous n'avons pas mentionné certaines propriétés dont nous pensons qu'elles sont évidentes pour tous les candidats, afin de ne pas alourdir une liste qui peut déjà sembler effrayante. Par exemple, nous supposons connu de tous que tous les rayons d'un cercle ont la même longueur. De même, nous supposons que chacun sait que le plus court chemin d'un point A à un point B est le segment [AB].

Dans le même esprit, en ce qui concerne les quadrilatères particuliers (parallélogramme, rectangle, losange et carré), nous n'avons indiqué que les propriétés caractéristiques : nous indiquons les théorèmes permettant de prouver qu'un quadrilatère est un rectangle, mais nous ne donnons pas la liste des propriétés que possède un rectangle. En effet, chacun sait qu'un rectangle a des angles droits et peut retrouver facilement à l'aide d'un petit dessin que ses diagonales ont la même longueur et le même milieu. En revanche, le petit dessin ne permet pas de retrouver quelles propriétés permettent de prouver qu'un quadrilatère est un rectangle.

- Droites
  - Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
  - Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
  - Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
  - Si deux droites sont parallèles et si elles ont un point commun, alors elles sont confondues.
- Médiatrice
  - La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.
  - *Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.*
  - *Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.*

- Triangle
  - *Si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.*
  - *Si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.*
  - *Si dans un triangle un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est la moitié de celle du troisième côté.*
  - *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, leur intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle (c'est à dire qui passe par les trois sommets du triangle).*
  - *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Leur intersection, appelée centre de gravité du triangle, est située aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.*
  - Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (leur intersection est appelée orthocentre du triangle).
  - Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes, leur intersection est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

- Triangle rectangle
  - *Si C est sur le cercle de diamètre [AB], alors le triangle ABC est rectangle en C.*
  - *Si un triangle ABC est rectangle en C, alors C est sur le cercle de diamètre [AB].*

- Triangle isocèle, triangle équilatéral
  - Si un triangle ABC est isocèle en A, alors les angles de sommets B et C sont égaux.
  - Si un triangle est équilatéral, alors il a trois angles égaux à 60°
  - Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.
  - Si un triangle a trois angles égaux, alors il est équilatéral.
  - Si un triangle est isocèle en A, alors sa médiane issue de A, sa hauteur issue de A, la médiatrice du côté opposé à A et la bissectrice de l'angle de sommet A sont confondues.
  - Si dans un triangle, la médiane issue du sommet A est aussi hauteur, alors ce triangle est isocèle en A.
  - Si dans un triangle, la médiane issue du sommet A est aussi bissectrice, alors ce triangle est isocèle en A.
  - Si dans un triangle, la hauteur issue du sommet A est aussi bissectrice, alors ce triangle est isocèle en A.

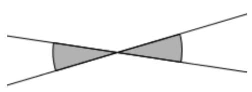
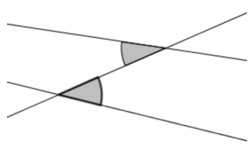
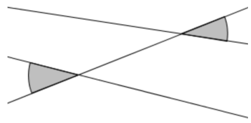
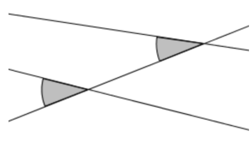
- Angles (les termes soulignés dans cette rubrique sont expliqués à la fin de la liste de propriétés).
  - La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.
  - Si deux angles sont <u>opposés par le sommet</u>, alors ils sont égaux.
  - Si deux angles <u>alternes-internes</u> sont formés à partir de droites parallèles, alors ils sont égaux.
  - Si deux droites forment avec une sécante commune des angles <u>alternes-internes</u> égaux, alors elles sont parallèles.
    - Les deux dernières propriétés restent vraies en remplaçant « alternes-internes » par « <u>alternes-externes</u> » ou « <u>correspondants</u> ».

- Angles et cercle
  - Si deux <u>angles inscrits</u> interceptent le même arc, alors ils sont égaux.
  - Si un <u>angle au centre</u> et un angle inscrit interceptent le même arc, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.

- Symétrie
  - Deux figures symétriques par rapport à un point ou par rapport à une droite sont superposables (elles ont donc exactement les mêmes propriétés).
  - Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.

Propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers :

- Parallélogramme
  - *Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.*
  - *Si deux côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.*
  - *Si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme.*
  - *Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.*
- Rectangle
  - *Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.*
  - *Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et la même longueur, alors c'est un rectangle.*
  - *Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.*
  - *Si les diagonales d'un parallélogramme ont la même longueur, alors c'est un rectangle.*
- Losange
  - *Si les quatre côtés d'un quadrilatère ont la même longueur, alors c'est un losange.*
  - *Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors c'est un losange.*
  - *Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.*
  - *Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors c'est un losange.*
- Carré
  - Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires, alors c'est un carré.
  - Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.
  - Si un losange a un angle droit alors c'est un carré.

angles opposés par le sommet	angles alternes-internes	angles alternes-externes	angles correspondants
			

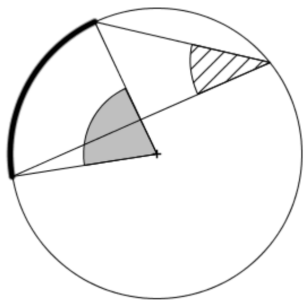
On parle d'angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants dans les situations où une droite en coupe deux autres.

On peut retenir visuellement chacune des configurations ou s'appuyer sur le fait qu' « alternes » fait référence à la sécante commune : les angles sont de part et d'autre de cette sécante. « Internes » et « externes » font référence à la zone limitée par les deux autres droites : les angles sont tous les deux à l'intérieur de cette zone ou tous les deux à l'extérieur.

Quant aux angles correspondants, ils ne sont ni alternes, ni internes, ni externes.

Remarque : à une époque, on n'utilisait ces termes que si une droite coupait deux parallèles... il n'était alors pas possible de démontrer le parallélisme à l'aide d'angles alternes-internes égaux. C'est pourquoi la terminologie a été modifiée.

La figure suivante montre un angle inscrit (hachuré) et un angle au centre (grisé) qui interceptent le même arc (en gras).



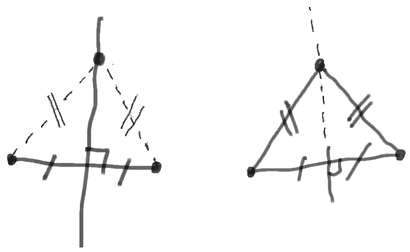
Comment retenir ces propriétés ?

Nous ne pensons pas que l'apprentissage par cœur du texte des propriétés soit une bonne méthode.

Voici un premier exemple de ce qu'on peut faire. Supposons que vous cherchiez à bien comprendre la différence entre les deux propriétés suivantes :

- Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.
- Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Nous vous conseillons de faire un schéma pour chacune des deux propriétés, en distinguant par un code personnel ce qui doit être connu pour utiliser la propriété de ce qu'elle permet de prouver.

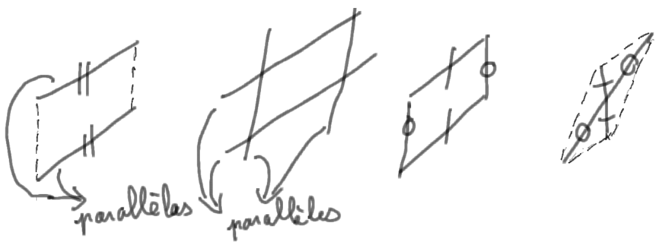


Nous avons choisi de tracer et coder en gras ce qui est connu au départ, en trait fin ce qu'on peut prouver à l'aide de la propriété. Avec ces conventions, la figure de gauche illustre la deuxième propriété, celle de droite illustre la première. Ce travail est important, car il est facile de confondre ces deux propriétés ce qui conduit à une preuve fausse.

Notons au passage qu'il y a là une raison supplémentaire de ne pas expliciter les théorèmes utilisés. En effet, si lors d'un exercice de démonstration, vous savez que CA = CB et que vous écrivez « CA = CB donc C est sur la médiatrice de [AB] », vous évitez le risque d'une éventuelle confusion entre les deux propriétés. Puisque c'est accepté, autant ne pas s'en priver.

Voici un deuxième exemple, pour retenir les propriétés caractéristiques du parallélogramme (c'est-à-dire celles qui permettent de prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme).

Cette fois, la conclusion étant toujours identique, nous n'avons codé que ce qu'il faut connaître pour affirmer que le quadrilatère est un parallélogramme, avec chacune des propriétés.



Remarques :

Les schémas sont faits à main levée. C'est presque toujours suffisant pour bien raisonner. Chercher à tout prix à obtenir une figure soignée prend du temps et de l'énergie, parfois au détriment de la réflexion attendue.

Le codage des longueurs égales est parfois mal interprété. Mettre le même signe sur deux segments a exactement la même signification que la phrase « ces deux segments ont la même longueur » ou bien que l'écriture « AB = CD ». Or, quand on écrit « AB = CD et BC = AD », on ne dit rien sur l'égalité éventuelle des longueurs AB et BC. Il en est de même avec le codage des figures, les signes utilisés sur notre troisième figure indiquent que les côtés opposés ont des longueurs égales deux à deux, ils n'excluent pas que les quatre longueurs puissent être égales.

Comment chercher une démonstration

Premier exemple

M et N sont deux points (non diamétralement opposés) d'un cercle de diamètre [AB].
Les droites (AM) et (BN) se coupent en R.
Les droites (AN) et (BM) se coupent en S.
Démontrer que les droites (AB) et (RS) sont perpendiculaires.

La première chose à faire, de façon systématique, est un dessin.

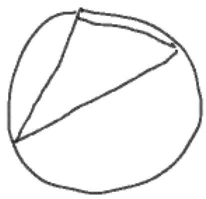
Comme un dessin à main levée est vite réalisé, nous conseillons plutôt d'en faire deux, aussi différents que possible. Ainsi, les idées que l'on trouvera à l'aide d'un dessin pourront être critiquées à l'aide de l'autre : le dessin de gauche pourrait par exemple faire penser que N est le milieu de [BR]. Il suffit de regarder le dessin de droite pour voir qu'il n'en est rien.

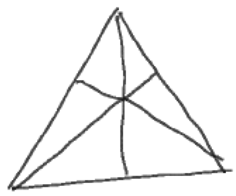
Dans un deuxième temps, il faut observer les dessins en y cherchant :

— des configurations qui évoquent des propriétés connues. Ces configurations seront plus faciles à reconnaître si vous avez essayé de retenir les propriétés classiques à l'aide de schémas, comme conseillé en page 94,
— des propriétés qui ont l'air vraies à l'œil, et qu'on pourra chercher à prouver un peu plus tard si elles sont prometteuses.

Pour reconnaître les configurations, il est souvent utile de ne regarder qu'une partie de la figure, quitte, si on a du mal à le faire mentalement, à refaire de nouveaux schémas partiels pour s'aider.

On peut par exemple voir dans les dessins ci-dessus les configurations suivantes :





Le schéma de gauche évoque deux propriétés liées au triangle rectangle et au cercle, celui de droite fait penser aux trois hauteurs d'un triangle, qui sont concourantes.

Par ailleurs, sur les dessins, les droites (AN) et (BR) semblent perpendiculaires. Il en est de même pour les droites (AR) et (BM).

À ce stade on peut essayer d'organiser ces remarques pour en faire une démonstration.

Il s'agirait de prouver que (RS) est perpendiculaire à (AB) parce que c'est la hauteur issue de R du triangle ABR. Il se peut que la deuxième figure vous fasse douter : on y verrait plutôt les trois hauteurs du triangle BRS que celles du triangle ABR. Pourtant, comme on l'a vu page 41 à propos des aires, les hauteurs peuvent aussi se situer entièrement à l'extérieur du triangle. Si on en tient compte, prouver que (RS) est la hauteur issue de R du triangle ABR reste un projet raisonnable.

Une des propriétés liées à la première configuration dessinée, permet de prouver qu'un triangle est rectangle. De triangle rectangle à perpendiculaire il n'y a qu'un pas, ainsi que de perpendiculaire à hauteur. C'est prometteur, nous pouvons commencer à rédiger :

— *M est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M, il en découle que (BM) est la hauteur issue de B du triangle ABR.*
— *N est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ANB est rectangle en N, il en découle que (AN) est la hauteur issue de A du triangle ABR.*
— *(AN) et (BM) sont deux hauteurs du triangle ABR, leur intersection S est donc l'orthocentre de ce triangle (c'est à dire le point d'intersection des trois hauteurs).*
— *Dans le triangle ABR, la hauteur issue de R passe par le point R et par l'orthocentre S, c'est donc la droite (RS).*
— *(RS) est la hauteur issue de R du triangle ABR, elle est donc perpendiculaire à (AB).*

L'essentiel à ce stade est de comprendre qu'une démonstration ne jaillit pas entièrement rédigée du cerveau du mathématicien, elle se construit progressivement à l'aide de dessins, d'observations, de rappel en mémoire des propriétés disponibles. La rédaction est essentielle, mais ce n'est que l'étape finale de mise en forme.

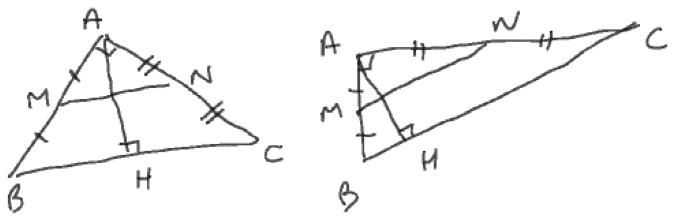
Une fois la démonstration écrite, il reste à soumettre chacune de ses étapes à une critique sans complaisance. Vérifier la validité d'une étape de la démonstration ne consiste pas à vérifier la validité de sa conclusion. Pour s'assurer que l'étape « M est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M » est correcte, il ne sert à rien de regarder sur les schémas si le triangle AMB semble rectangle : il y a longtemps que nous l'avons remarqué, c'est même l'un des points qui ont guidé notre démonstration.

En revanche, il faut vérifier que la propriété implicite sur laquelle nous nous appuyons existe bien (c'est le cas, il s'agit de la première propriété de la rubrique « triangle rectangle » de la page 92) et que les faits évoqués pour l'utiliser sont connus (c'est le cas, l'énoncé dit que M est sur le cercle de diamètre [AB]).

Deuxième exemple

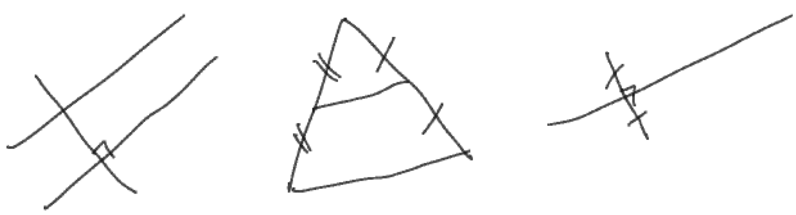
ABC est un triangle rectangle en A.
M et N sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].
H est le pied de la hauteur issue de A.
Démontrer que le triangle MHN est rectangle en H.

Comme pour l'exercice précédent, commençons par des schémas.



Après réflexion, le dessin de gauche n'est pas très judicieux. Le triangle ABC y semble isocèle, H semble être le milieu de [BC]... or on voit sur le dessin de droite que ce n'est pas toujours le cas. Nous nous fierons donc plutôt au dessin de droite, et nous en ferons éventuellement un troisième si le besoin s'en fait sentir.

Nous observons sur le dessin les configurations suivantes :



Rappelons qu'il ne s'agit là que d'ouvrir des pistes, nous avons par exemple codé sur le troisième schéma un angle droit et une égalité de longueurs qui semblent raisonnables sur la figure complète, mais ne sont nullement prouvés.

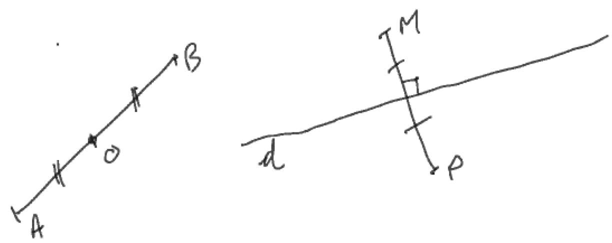
On peut aussi observer que la configuration liée au triangle se retrouve trois fois dans la figure, dans les triangles ABC, ABH et AHC. C'est le moment de revoir page 92 les trois propriétés liées à cette configuration, on ne peut sans doute pas appliquer n'importe laquelle à n'importe lequel des trois triangles.

Aucune piste très évidente ne se dégageant, on peut faire la liste des affirmations que l'on saurait prouver, sans aller jusqu'à rédiger dans le détail les preuves : nous en sommes toujours au stade du brouillon.

Nommons O l'intersection de (AH) et (MN), nous devrions parvenir à prouver les faits suivants :
(MN) // (BC) ; (MN)$\perp$ (AH) ; O est le milieu de [AH] ; (MN) est la médiatrice de [AH].

Nous vous suggérons de rechercher pour chacune des affirmations ci-dessus la propriété qui permet effectivement de la prouver. Nous les avons rangées dans un ordre qui facilite les choses.

Si les éléments précédents ne vous mettent pas sur la voie d'une conclusion, voici un dernier conseil : il est souvent utile de reformuler ce qu'on sait. Décrire le même objet géométrique d'un autre point de vue permet d'évoquer de nouvelles propriétés qui débloquent parfois la situation. Deux exemples permettront de mieux comprendre ce dont il s'agit.



— Les indications codées sur le schéma de gauche peuvent se traduire indifféremment par « O est le milieu de [AB] » ou par « B est le symétrique de A par rapport à O ».
— Les indications codées sur le schéma de droite peuvent se traduire indifféremment par « la droite d est la médiatrice de [MP] » ou par « P est le symétrique de M par rapport à la droite d ».

En revenant à notre problème, si l'on réussit à prouver que (MN) est la médiatrice de [AH], cela reviendrait donc à dire que A et H sont symétriques par rapport à (MN)… ce qui introduit l'idée de symétrie à laquelle nous n'avions pas encore songé. Retournons au schéma initial : a-t-il d'autres éléments qui semblent symétriques par rapport à (MN) ?

La réponse est oui : le triangle ANM semble symétrique au triangle HMN, ce que nous n'avions pas remarqué jusque là pour la bonne raison que le triangle HMN n'est pas tracé, mais qui pourrait nous conduire à la solution. En effet, si ces deux triangles sont réellement symétriques et si l'un des deux est rectangle, l'autre l'est aussi.

Il est enfin temps de chercher à rédiger une démonstration, ce que nous vous encourageons à faire avant de lire la proposition qui suit.

— *Dans le triangle ABC, M est le milieu de[AB] et N est le milieu de [AC] donc (MN) est parallèle à (BC).*
— *(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC donc (AH) est perpendiculaire à (BC).*
— *(MN) est parallèle à (BC) et (AH) est perpendiculaire à (BC) donc (MN) est perpendiculaire à (AH).*

- *Dans le triangle ABH, la droite (MN) est parallèle à (BH) et passe par le milieu du côté [AB], elle passe donc par le milieu du côté [AH].*
- *La droite (MN) est perpendiculaire à (AH) et passe par le milieu de [AH] c'est donc la médiatrice de [AH].*
- *(MN) est la médiatrice de [AH] donc A et H sont symétriques par rapport à (MN).*
- *Dans la symétrie d'axe (MN), le symétrique de M est M, le symétrique de A est H et le symétrique de N est N, il en résulte que le symétrique du triangle MAN est le triangle MHN.*
- *Les triangles MAN et MHN sont symétriques, or MAN est rectangle en A, donc MHN est rectangle en H.*

Cette démonstration n'est bien entendu pas la seule possible.

Exercices

Dans les deux premiers exercices, l'idée de la preuve ne présente pas de difficulté, leur but est principalement de prendre de bonnes habitudes de rédaction.

Certains exercices seraient probablement présentés au concours sous forme de questions enchainées, afin de guider les candidats. Nous choisissons cependant de les donner sans étape intermédiaire, et nous vous encourageons à les chercher sous cette forme. Si cela vous parait trop difficile, vous trouverez des suggestions d'étapes intermédiaires dans les indications.

Exercice 1

On considère un cercle de centre O et deux points A et B situés sur le cercle.
Tracer un rectangle OARS.
Démontrer que RS = OB.

Exercice 2

A et B sont deux points quelconques. Tracer le cercle de centre A qui passe par B et le cercle de centre B qui passe par A. Les deux cercles se coupent en R et S.
Démontrer que (RA) est parallèle à (BS).

Exercice 3

ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes.
Démontrer que les droites (FD) et (EC) sont parallèles.

Exercice 4

ABC est un triangle isocèle en C. Le cercle de centre A passant par C et le cercle de centre B passant par C se coupent en C et en P.
Démontrer que (AB) et (PC) sont perpendiculaires.

Exercice 5

ABCD est un quadrilatère quelconque. R est le milieu de [AB], S le milieu de [BC], T celui de [CD] et U celui de [DA].
Démontrer que RSTU est un parallélogramme.

Exercice 6

On considère deux cercles dont les centres sont A et B, et qui se coupent en C et D.
Tracer le cercle ayant pour diamètre [CD], il coupe (AB) en E et en F.
Démontrer que le quadrilatère CEDF est un carré.

Exercice 7

On considère un triangle ABC. Soit M le milieu de [AB], N le milieu de [BC], S le symétrique de M par rapport à A, D le symétrique de C par rapport à S.
Démontrer que AD = 2 AN.

Exercice 8

ABC et ABD sont deux triangles équilatéraux (Les points C et D sont bien entendu distincts). R est le milieu de [BC], S est le milieu de [AD]. On appelle O l'intersection de [RD] et [BS].
Démontrer que O est le milieu de [RD].

Exercice 9

On considère un triangle ABC. Le cercle de diamètre [AB] et le cercle de diamètre [AC] se coupent en A et en I. Démontrer que I est sur (BC)

Exercice 10

On considère un cercle de centre O et de diamètre [AB]. M est un point de ce cercle (distinct de A et B). B' est le symétrique de B par rapport à M.
La parallèle à (OM) passant par B coupe (AM) en P. Démontrer que AB'PB est un losange.

Exercice 11

M et R sont deux points d'un cercle de diamètre [AB] et de centre C.
La droite (AM) coupe le cercle de diamètre [AC] en A et en N.
La droite (AR) coupe le cercle de diamètre [AC] en A et en S.
Démontrer que (MR) // (NS).

Exercice 12

On considère un cercle de diamètre [AB] et des points M et N de ce cercle.
Soit P l'intersection de (AM) et (BN). Soit R l'intersection de (AN) et (BM).
Démontrer que les droites (AB) et (PR) sont perpendiculaires.

Indications sur les exercices

Exercice 3

- Avez-vous veillé à ne pas tracer une figure trop particulière ? Par exemple, il n'y a aucune raison que les deux parallélogrammes soient des rectangles, il n'y a aucune raison non plus pour que les points B, C et E soient alignés. Avez-vous également fait attention à l'ordre conventionnel pour nommer les sommets ? Si le second parallélogramme s'appelle ABEF, c'est que [AB], [BE], [EF] et [FA] sont ses côtés.
- Sur la figure, un troisième quadrilatère semble un bon candidat pour être un parallélogramme.

Exercice 4

- Qui dit cercle dit rayons de même longueur. Commencez par écrire toutes les égalités de longueur que vous pouvez prouver.

Exercice 5

- Tracez une diagonale de ABCD, cela devrait évoquer des propriétés liées au triangle.

Exercice 6

- On ne sait rien sur les côtés ni sur les angles du quadrilatère CDEF, il est donc raisonnable d'essayer de prouver que c'est un carré en utilisant ses diagonales.
- Démontrez que la droite (AB) est la médiatrice de [CD].

Exercice 7

- Intéressez-vous au triangle BCD.
- Le segment [SB] semble partagé en trois parties de longueurs égales. Est-ce vrai ? Cela devrait aider à montrer que le point A est un point très particulier du triangle BCD.

Exercice 8

- Démontrez que les quadrilatères ACBD et RBDS sont bien ce qu'ils paraissent être.

Exercice 9

- En ne considérant qu'un des cercles et les points qui sont sur ce cercle, on obtient une configuration qui devrait évoquer des propriétés connues. Si vous ne retrouvez pas ces propriétés, elles figurent à la page 92.

Exercice 10

- La propriété caractéristique du losange liée aux diagonales semble la plus indiquée.
- Observez des parties de la figure, cherchez-y des configurations classiques.

Exercice 11

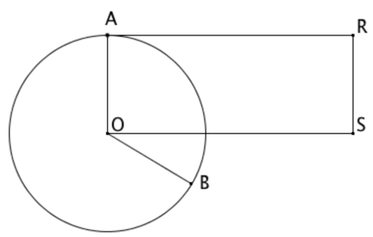
— Une étape possible, démontrer que N est le milieu de [AM].
— Si cette étape est encore difficile à atteindre, cherchez à montrer que (NC) et (MB) sont parallèles.

Exercice 12

— Il s'agit exactement du problème pris comme exemple pour les conseils sur la façon de chercher une démonstration.

Solutions des exercices

Exercice 1

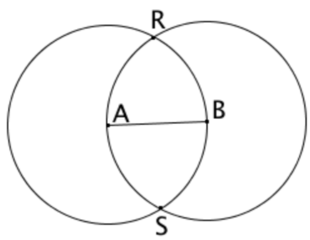


— [OA] et [OB] sont deux rayons du même cercle, donc OA = OB.
— [OA] et [RS] sont deux côtés opposés du rectangle OARS, donc OA = RS.
— OB = OA et OA = RS donc OB = RS.

Remarques :

— *Nous utilisons dans cette petite démonstration le fait que [OA] est un rayon du cercle, qui ne figure pas explicitement dans le texte. On suppose en effet que tout lecteur (candidat ou correcteur) sait qu'un segment qui joint le centre du cerle à un point du cercle est un rayon. Il est permis de ne pas reprendre textuellement les informations de l'énoncé mais de les reformuler. L'important ici est de bien mettre en évidence les trois étapes du raisonnement.*
— *Beaucoup de candidats rédigent la dernière étape sous la forme « OB = OA = RS ». Cette forme est à éviter car elle ne distingue pas ce qu'on sait au départ (grâce aux étapes précédentes) de ce qu'on prouve à cette étape.*

Exercice 2

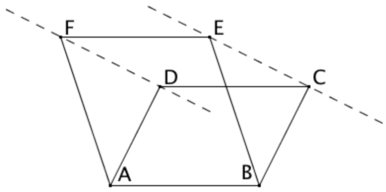


— B, R et S sont sur le même cercle de centre A, donc AB = AR = AS.
— A, R et S sont sur le même cercle de centre B, donc BA = BR = BS.
— Les quatre côtés du quadrilatère ARBS ont la même longueur (la longueur AB), donc ARBS est un losange.
— ARBS est un losange, donc ses côtés opposés [RA] et [BS] sont parallèles.

Remarques :

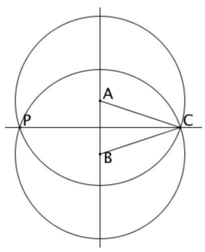
— *Quand on parle de longueurs de segments, on n'emploie ni parenthèse ni crochet, comme dans les deux premières lignes.*
— *On emploie [AB] pour désigner le segment d'extrémités A et B : « M est le milieu de [AB] ».*
— *On utilise (AB) pour désigner la droite qui passe par A et B : « P est un point situé sur (AB) mais pas sur [AB] ».*

Exercice 3



— ABCD est un parallélogramme, donc ses côtés opposés [AB] et [CD] sont parallèles et de même longueur.
— ABEF est un parallélogramme, donc ses côtés opposés [AB] et [EF] sont parallèles et de même longueur.
— CD = AB et AB = EF donc CD = EF.
— (CD) // (AB) et (AB) // (EF) donc (CD) // (EF).
— Les côtés opposés [CD] et [EF] du quadrilatère non croisé CDFE sont à la fois parallèles et de même longueur, donc CDFE est un parallélogramme.
— CDFE est un parallélogramme, donc (FD) // (CE).

Exercice 4



— P et C sont sur le même cercle de centre A, donc AP = AC.
— AP = AC donc A est sur la médiatrice de [PC].
— On démontre de la même façon que B est sur la médiatrice de [PC].
— La médiatrice de [PC] passe par A et par B, il s'agit donc de la droite (AB).
— (AB) est la médiatrice de [PC], les droites (AB) et (PC) sont donc perpendiculaires.

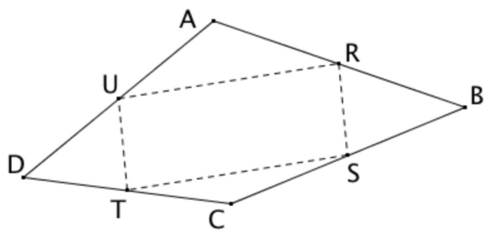
Remarques :

- *La troisième ligne est acceptée sans problème parce que les raisonnements permettant de dire que B est sur la médiatrice de [PC] sont exactement les mêmes que pour A.*
- *On s'aperçoit que la preuve n'utilise pas le fait que le triangle ABC est isocèle, la conclusion serait donc vraie même s'il ne l'était pas.*
- *D'autres démonstrations sont évidemment possibles, ce qui est presque toujours le cas, particulièrement quand les démonstrations deviennent un peu longues. Il ne s'agit donc pas pour vous de vérifier si votre version est conforme à celle du corrigé, ce ne sera presque jamais le cas. Si votre démarche diffère de celle du corrigé et si, après relecture critique de votre production, vous ne lui découvrez pas de défaut, c'est peut-être qu'elle est correcte. Il n'y a pas d'autre moyen absolument sûr de le savoir que de la faire relire par une personne compétente.*

Autre version :

- P et C sont sur le même cercle de centre A, donc AP = AC.
- P et C sont sur le même cercle de centre B, donc BP = BC.
- ABC est isocèle en C, donc AC = BC.
- Il résulte des trois égalités ci-dessus que les quatre côtés du quadrilatère PACB ont la même longueur, c'est donc un losange.
- PACB est un losange, donc ses diagonales (AB) et (PC) sont perpendiculaires.

Exercice 5

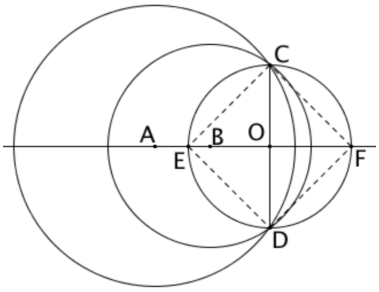


- Dans le triangle ABC, R est le milieu de [AB], S est le milieu de [AC], donc (RS) // (AC).
- Dans le triangle ADC, U est le milieu de [AD], T est le milieu de [CD], donc (TU) // (AC).
- (RS) // (AC) et (TU) // (AC), donc (RS) // (TU).
- On prouve de la même façon en utilisant les triangles BAD et BCD que (TS) // (RU).
- Le quadrilatère RSTU a ses côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.

Remarques :

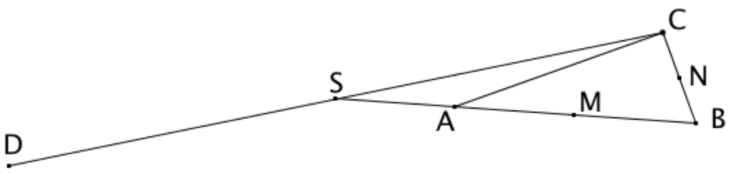
- *On pouvait aussi démontrer, en utilisant également les milieux des côtés des triangles, que le quadrilatère non croisé RSTU a ses côtés opposés de même longueur.*
- *Il était également possible de n'utiliser que deux côtés opposés, par exemple [UR] et [ST], et de prouver qu'ils sont à la fois parallèles et de même longueur.*

Exercice 6



- — C et D sont sur le cercle de centre A donc CA = DA, donc A est sur la médiatrice de [CD].
- — C et D sont sur le cercle de centre B donc CB = DB, donc B est sur la médiatrice de [CD].
- — A et B sont sur la médiatrice de [CD], la droite (AB) est donc la médiatrice de [CD].
- — (AB) est la médiatrice de [CD] donc (AB) est perpendiculaire à (CD) et leur intersection, que nous nommerons O, est le milieu de [CD].
- — O est le milieu de [CD] par conséquent O est le centre du cercle qui a pour diamètre [CD].
- — [CD] et [EF] sont deux diamètres du même cercle, par conséquent ils ont le même milieu et la même longueur.
- — Les diagonales [CD] et [EF] du quadrilatère CEDF ont le même milieu et la même longueur, donc CEDF est un rectangle.
- — (AB) est perpendiculaire à (CD), ce qui revient à dire que (EF) est perpendiculaire à (CD), les diagonales du rectangle CEDF sont donc perpendiculaires, par conséquent c'est un carré.

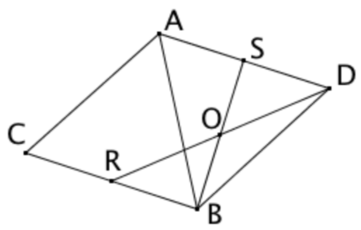
Exercice 7



- — D est le symétrique de C par rapport à S, donc S est le milieu de [CD].
- — S est le milieu de [CD] donc [BS] est une médiane du triangle BCD.
- — N est le milieu de [BC] donc [DN] est une médiane du triangle BCD.
- — S le symétrique de M par rapport à A donc SA = AM.
- — M est le milieu de [AB] donc AM = MB.
- — Il résulte des deux points précédents que le point A est situé au deux tiers de la médiane [BS] en partant du sommet B, c'est donc le centre de gravité du triangle BCD.
- — A est le centre de gravité de BCD, il est donc situé au deux tiers de la médiane [DN] en partant du sommet D, il en résulte que DA = 2 AN.

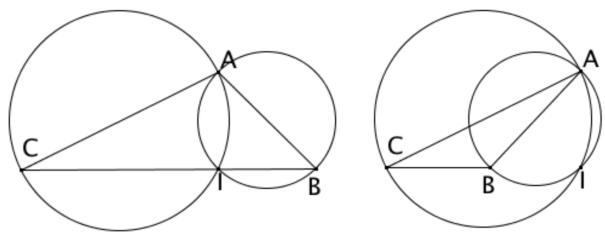
Remarque : voici une version tentante, mais fausse. « A est l'intersection des médianes [BS] et [DN] du triangle BCD, c'est donc son centre de gravité ». En effet, pour dire cela, il faut admettre que les points D, A et N sont alignés, ce qui n'a rien d'évident.

Exercice 8



- ABC et ABD sont équilatéraux, il en résulte que les longueurs AC, BC, BD et AD sont toutes égales à AB, le quadrilatère ACBD a donc quatre côtés de même longueur, par conséquent c'est un losange.
- ACBD est un losange, ses côtés opposés [AD] et [BC] sont donc parallèles, les segments [SD] et [RB] sont donc également parallèles.
- R est le milieu de [BC] donc RB = BC/2.
- S est le milieu de [AD] donc SD = AD/2.
- Comme BC = AD, les deux égalités précédentes permettent de conclure que RB = SD.
- Dans le quadrilatère non croisé BRSD, les côtés opposés [BR] et [SD] ont la même longueur et sont parallèles, BRSD est donc un parallélogramme.
- BRSD est un parallélogramme, ses diagonales se coupent donc en leur milieu, par conséquent O est le milieu de [RD].

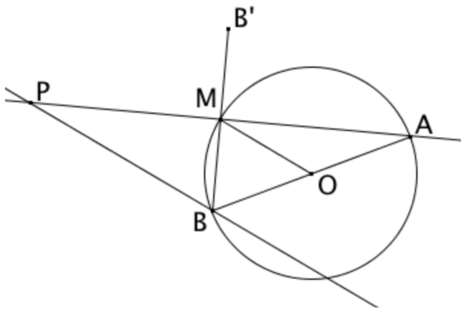
Exercice 9



- I est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABI est rectangle en I, il en résulte que (BI) est perpendiculaire à (AI).
- On démontre de la même façon que (CI) est perpendiculaire à (AI).
- Les droites (BI) et (CI) sont perpendiculaires à (AI) et passent par le point I, or il n'y a qu'une seule perpendiculaire à (AI) passant par le point I, donc (BI) et (CI) sont confondues, ce qui revient à dire que I est sur (BC).

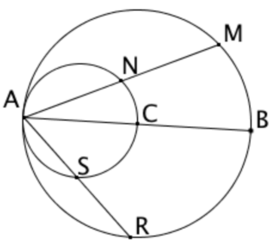
Remarque : On peut rédiger une démonstration proche en utilisant les mesures d'angles à la place de la perpendicularité. On montrerait ainsi que $\widehat{AIB} = 90^\circ$, que $\widehat{AIC} = 90^\circ$ puis que $\widehat{BIC} = 180^\circ$ (somme des deux angles précédents). Cette démonstration présente l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à la disposition de la figure de gauche.
Pour qu'une démonstration utilisant les mesures d'angle soit entièrement satisfaisante, il faudrait montrer qu'on peut obtenir soit $\widehat{BIC} = 180^\circ$ soit $\widehat{BIC} = 0^\circ$ puis conclure que dans les deux cas le point I est sur (BC).

Exercice 10



— [AB] est un diamètre du cercle de centre O donc O est le milieu de [AB].
— Dans le triangle ABP, la droite (OM) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BP] , donc elle coupe le côté [AP] en son milieu qui est donc le point M.
— B' est le symétrique de B par rapport à M, donc M est le milieu de [BB'].
— M est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M. AMB est rectangle en M, les droites (AP) et (BB') sont donc perpendiculaires.
— Les diagonales [AP] et [BB'] du quadrilatère AB'PB sont perpendiculaires et ont le même milieu donc AB'PB est un losange.

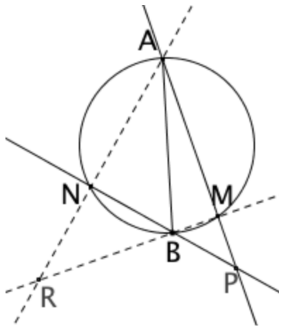
Exercice 11



— M est sur le cercle de diamètre [AB] donc AMB est rectangle en M, par conséquent (BM) est perpendiculaire à (AM).
— N est sur le cercle de diamètre [AC] donc ANC est rectangle en N, par conséquent (CN) est perpendiculaire à (AN), ce qui revient à dire qu'elle est perpendiculaire à (AM).
— Les droites (BM) et (CN) sont donc toutes deux perpendiculaires à (AM) donc (BM) est parallèle à (CN).
— Dans le triangle ABM, la droite (CN) passe par le milieu C de [AB] et est parallèle à (BM), donc elle passe par le milieu de [AM]. Par conséquent N est le milieu de [AM].
— On montre de la même façon que S est le milieu de [AR].
— Dans le triangle AMR, la droite (NS) passe par les milieux des côtés [AR] et [AM] donc elle est parallèle au côté [MR].

Remarque : Cette démonstration étant déjà assez difficile et longue, nous avons admis que C est le milieu de [AB].

Exercice 12



Une démonstration rédigée se trouve à la page 96, seuls les noms de certains points de la figure ont changé.