

Chapitre 3

L'aire

Qu'est-ce que l'aire ?

Cette question peut sembler naïve, mais n'est pas si simple.

Dans les dictionnaires, on obtient par exemple :

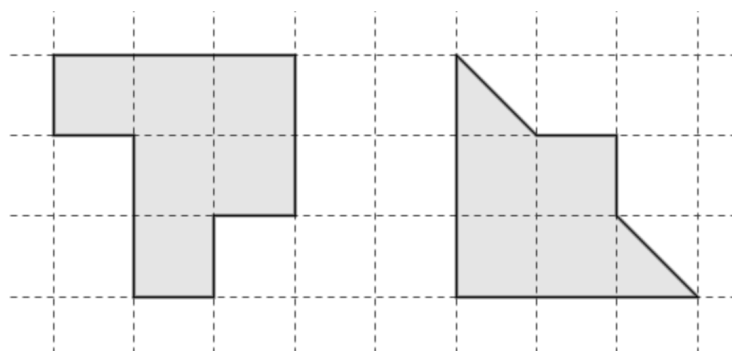
- Aire : Portion limitée de surface, nombre qui la mesure. (Petit Robert 1981).
- Aire : Mesure d'une surface limitée par des lignes. (Petit Larousse 1978).
- Aire : Nombre mesurant une surface ; mesure d'une surface. (Petit Larousse 2014).

Ces définitions ne sont pas très éclairantes pour qui ne sait pas par avance ce qu'est l'aire.

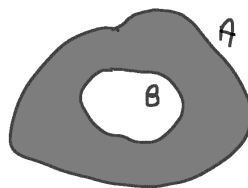
Nous utiliserons ici la définition suivante :

L'aire d'une figure est le nombre de centimètres carrés nécessaires pour la recouvrir.

Ainsi, si les carreaux du quadrillage de cette figure ont des côtés de un centimètre, l'aire de la surface de gauche est de 6 centimètres carrés, celle de la surface de droite est 5 centimètres carrés.



La figure suivante représente une surface B posée sur une surface A. Pour recouvrir la figure A avec des centimètres carrés, il faut tous les centimètres carrés utilisés pour recouvrir B plus ceux nécessaires pour recouvrir la partie visible de A. Il faut donc plus de centimètres carrés pour recouvrir A que pour recouvrir B, l'aire de A est plus grande que l'aire de B.



Cette façon de comparer les aires de deux surfaces rappelle une façon très courante de comparer les longueurs de deux lignes :



En plaçant les deux lignes l'une contre l'autre, on observe que la ligne du dessous dépasse aux deux extrémités. La ligne du dessous est donc la plus longue.

Dans l'enseignement primaire et secondaire, on se garde bien de définir ce qu'est la longueur d'une ligne, on considère qu'il s'agit d'une connaissance implicite bien partagée : quand nous disons qu'une ligne est plus longue qu'une autre, nous nous comprenons. La longueur est une caractéristique des lignes, c'est la caractéristique qu'on compare par la manœuvre que nous venons d'exposer.

L'idée de longueur est bien partagée parce que nous avons dès notre petite enfance de nombreuses occasions de comparer des longueurs : le crayon jaune est plus grand que le vert, Paul est plus grand que le framboisier... l'idée de longueur naît de la comparaison.

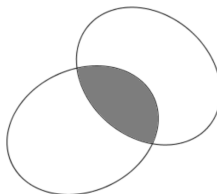
De même, l'aire est en réalité une caractéristique des surfaces, celle qu'on compare comme nous l'avons fait pour les surfaces A et B. Cependant, les occasions de comparer des surfaces de ce point de vue sont beaucoup plus rares que les occasions de comparer des lignes du point de vue de leur longueur. On n'est pas assuré en disant « l'aire de la surface A est plus grande que l'aire de la surface B » de s'appuyer sur une idée partagée. C'est pourquoi une définition explicite telle que celle que nous avons donnée nous semble indispensable malgré ses défauts, nous continuerons donc à y faire référence.

Pour être précis, ce que nous avons défini comme étant l'aire est en réalité la mesure de l'aire quand on choisit comme unité le centimètre carré.

Retrouver le sens des formules de calcul d'aire

Pour résoudre un problème à propos de l'aire, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir recours à des formules.

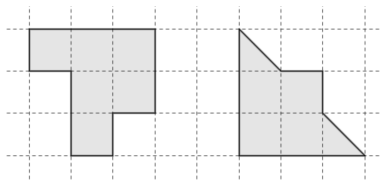
Sur cette figure on a tracé deux ellipses identiques. Comment comparer les aires des deux zones blanches ?



Chacune de ces deux aires s'obtient en soustrayant l'aire de la zone commune grise de l'aire d'une ellipse. On peut donc affirmer que les aires des deux zones blanches sont égales, bien que l'on ne sache pas les calculer.

Quand vous aurez lu ce qui suit à propos des formules de calcul d'aire, vous devrez cependant garder à l'esprit cette possibilité de raisonner sans aucun calcul pour comparer des aires.

Cependant il est souvent pratique, parfois indispensable, de passer par les nombres.

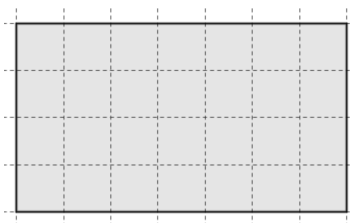


Pour comparer les aires de ces deux figures, le plus simple est de compter le nombre de carreaux contenus à l'intérieur de chaque figure. La figure de gauche contient six carreaux, son aire est plus grande que l'aire de la figure de droite qui ne contient que cinq carreaux. La comparaison est possible même si les carreaux ne sont pas des centimètres carrés, ils suffit que tous les carreaux soient identiques.

Dans bien des cas, il n'est pas possible de compter directement les centimètre carrés, on est contraint de calculer leur nombre, c'est à cela que servent les formules qui suivent.

L'aire du rectangle

Quand les dimensions du rectangle en cm sont entières, par exemple 4 cm sur 7 cm, il est facile de dessiner un quadrillage montrant les centimètres carrés dans le rectangle.



Comme il y a 4 rangées de 7 carrés, ou 7 colonnes de 4 carrés, il est facile de calculer le nombre de centimètres carrés à l'intérieur du rectangle. L'aire de ce rectangle est de $7 \times 4 \text{ cm}^2$.

Il est clair qu'on pourrait faire la même chose avec un rectangle dont les dimensions seraient d'autres nombres entiers, d'où la formule :

$$\text{Aire du rectangle} = \text{Longueur} \times \text{Largeur}$$

Le procédé est encore valable s'il se trouve par hasard que les deux dimensions du rectangle sont égales : il n'est pas nécessaire d'apprendre une formule particulière pour le carré.

Le cas du carré mérite néanmoins une attention particulière, car il permet de comprendre les relations entre les différentes unités d'aires.

Imaginons un carré d'un décimètre de côté (c'est-à-dire un décimètre carré) il contient 10×10 , soit 100 centimètres carrés.

On peut obtenir de la même façon : $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$; $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$; $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$.

Ces relations sont fondamentales pour passer d'une unité d'aire à une autre.

L'explication fournie ci-dessus ne vaut que quand les dimensions du rectangle sont entières. Voyons ce qu'il en est pour un rectangle de 5,4 cm sur 3,2 cm.

Rien ne nous oblige à mesurer ses côtés en centimètres, il est également possible de le faire en millimètres. Notre rectangle mesure 54 mm sur 32 mm. On peut alors imaginer un quadrillage en petits carrés d'un millimètre de côté (des millimètres carrés). L'explication fournie plus haut s'applique alors parfaitement : il y a 54 rangées de 32 millimètres carrés, l'aire du rectangle est $54 \times 32 \text{ mm}^2$, soit 1728 mm^2 .

Or, 1728 mm^2 , c'est $17 \times 100 \text{ mm}^2 + 28 \text{ mm}^2$.

En utilisant la relation établie plus haut entre centimètre carré et millimètre carré, on voit que 1728 mm^2 , c'est $17 \text{ cm}^2 + 28$ centièmes de mm^2 , ce qui s'écrit $17,28 \text{ cm}^2$.

On constate en effectuant l'opération $5,4 \times 3,2$ qu'on trouve exactement la même valeur. La formule *Longueur* \times *largeur* fournit donc l'aire du rectangle de 5,4 cm sur 3,2 cm.

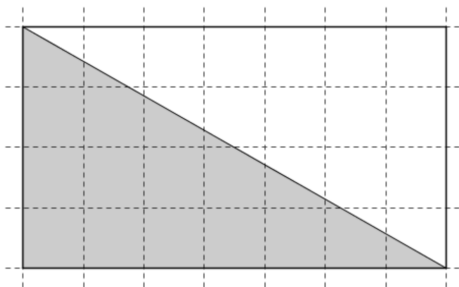
On admettra que cette formule est valable pour tous les rectangles.

Remarque : La méthode utilisée pour convertir l'aire du rectangle de mm^2 en cm^2 , n'est pas la seule possible. On peut par exemple considérer que, puisque chaque centimètre carré contient 100 millimètres carrés, il y a 100 fois moins de centimètres carrés que de millimètres carrés, il suffit donc de diviser par 100.

Quelle que soit votre préférence en la matière, il est souhaitable, tant pour votre compréhension des mathématiques que pour la préparation des questions d'ordre didactique, de ne pas recourir de façon systématique au tableau de conversion.

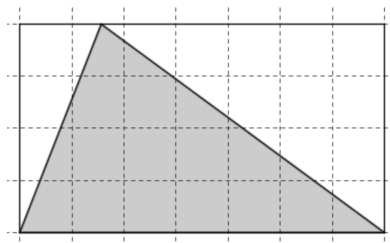
L'aire du triangle rectangle

La diagonale d'un rectangle partage le rectangle en deux triangles rectangles identiques.



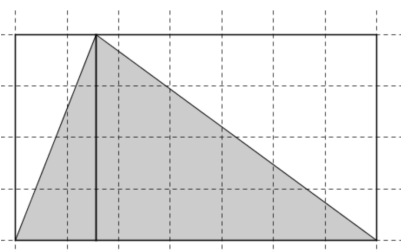
Ce rectangle contient 28 centimètres carrés, il est partagé en deux triangles superposables, chacun des deux contient donc la moitié des 28 centimètres carrés.

L'aire du triangle



Nous allons montrer que ce triangle, comme le précédent, a une aire égale à la moitié de l'aire du rectangle.

La preuve repose sur le découpage du triangle en deux triangles rectangles.



En partageant le triangle en deux triangles rectangles, nous avons également partagé le rectangle en deux rectangles. Chacune des parties rectangulaires est partagée en deux triangles rectangles identiques dont l'un est à l'intérieur du triangle gris et l'autre à l'extérieur. Il en résulte que l'aire du triangle gris est égale à l'aire de la partie blanche du rectangle. L'aire du triangle est donc la moitié de celle du rectangle.

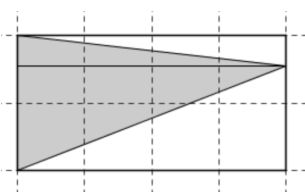
En utilisant les mots liés au rectangle, l'aire du triangle est donc égale à $\frac{\text{Longueur} \times \text{largeur}}{2}$.

Cependant, la longueur du rectangle est aussi un côté du triangle. Ce côté utilisé pour calculer l'aire est appelé base du triangle.

Par ailleurs, le trait de partage du triangle en deux triangles rectangles est appelé hauteur du triangle, il a la même longueur que la largeur du rectangle. Si on remplace les mots « longueur » et « largeur » de la formule, qui évoquent le rectangle, par les mots « base » et « hauteur », liés au triangle, la formule devient :

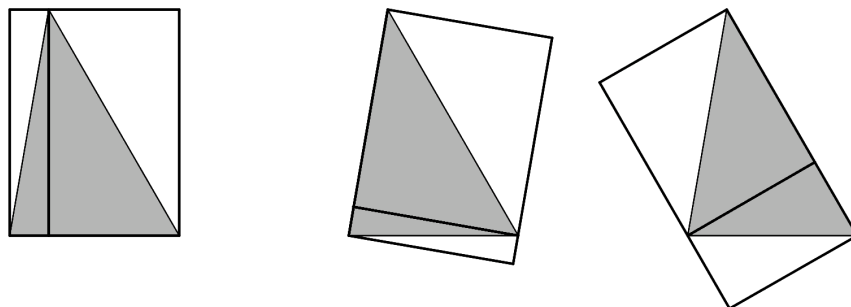
$$\text{Aire du triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Remarque : Il se peut que la base du triangle corresponde à une largeur du rectangle, et que la hauteur corresponde à la longueur, ce qui ne change rien au raisonnement.



La figure suivante montre trois façons de partager le même triangle en deux triangles rectangles. Chacun des trois côtés du triangle peut servir de base.

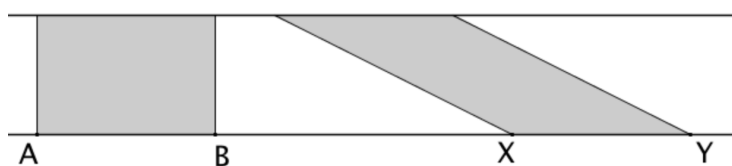
La hauteur est dans les trois cas le segment selon lequel on partage le triangle en deux triangles rectangles. La base est le côté du triangle qui a été partagé, elle est perpendiculaire à la hauteur.



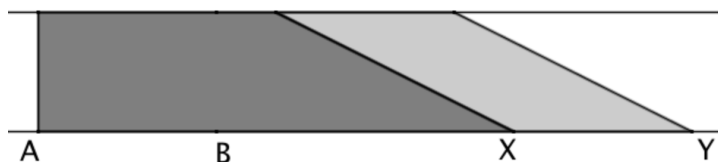
Remarque : Les termes « base » et « hauteur » sont d'un emploi délicat, car leur sens mathématique n'est pas celui qu'ils ont dans la vie courante. Les deux sens sont cohérents sur le dessin de gauche uniquement : la base (au sens mathématique) est en bas ; en mesurant la hauteur (au sens mathématique) on trouve la hauteur (au sens courant) c'est-à-dire la distance entre le point le plus haut et le sol. Choisir de tracer les figures en plaçant la base en bas et horizontale est à la fois une aide et un obstacle. C'est une aide parce que l'usage mathématique de « base » et « hauteur » se rapproche alors de l'usage commun. Si ce choix est systématique, il devient un obstacle, car il empêche d'envisager que les autres côtés du triangle peuvent aussi être choisis comme base. Nous verrons dans les exercices que la capacité à envisager plusieurs possibilités pour la base est parfois la clé de la réussite.

L'aire du parallélogramme

La figure montre un rectangle et un parallélogramme tracés entre deux droites parallèles. Les côtés $[AB]$ et $[XY]$ ont la même longueur.



Fabriquons ou imaginons un cache en carton qui recouvre exactement le rectangle et la partie vide située entre le rectangle et le parallélogramme.



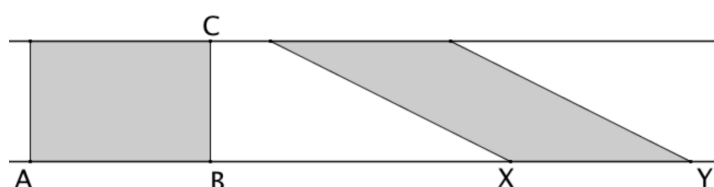
Faisons glisser ce cache vers la droite, de manière à ce qu'il recouvre entièrement le parallélogramme. Comme les longueurs AB et XY sont égales, le rectangle est maintenant entièrement visible.



Appelons F l'aire de la figure complète, comprenant le rectangle, le parallélogramme et la partie située entre les deux. Appelons G l'aire du cache.

Les deux figures précédentes montrent que l'aire du parallélogramme est égale à F - G et que l'aire du rectangle est égale à F - G.

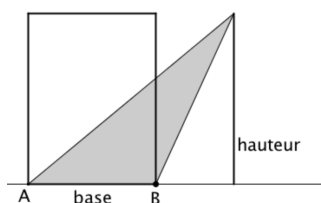
Le parallélogramme et le rectangle ont donc des aires égales.



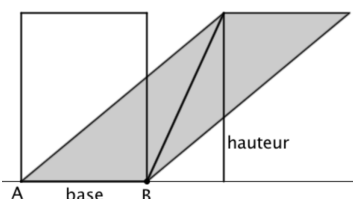
L'aire du rectangle se calculant par $AB \times BC$, cette expression fournit également l'aire du parallélogramme. La longueur AB, égale à XY sera désignée comme « base ». La longueur BC, distance entre les deux droites parallèles, est appelée hauteur du parallélogramme. On obtient alors la formule :

$$\text{Aire du parallélogramme} = \text{base} \times \text{hauteur}.$$

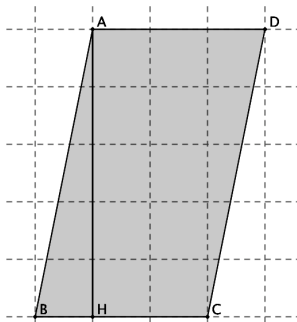
Une conséquence est que la formule « Aire du triangle = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ » reste exacte dans le cas qui suit, que nous avons passé sous silence lors de l'étude de l'aire du triangle. En effet, l'explication donnée alors ne s'applique pas ici. La hauteur est extérieure au triangle, elle ne le partage pas en deux triangles rectangles.



À l'aide d'un deuxième triangle identique au premier, nous pouvons former un parallélogramme. L'aire du triangle est égale à la moitié de celle du parallélogramme (ou à la moitié de celle du rectangle) ce qui explique que la formule vue plus haut est encore valable dans ce cas.

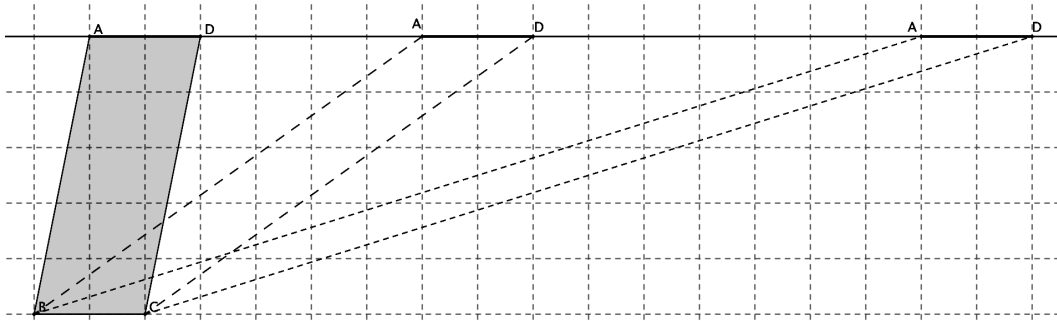


Une autre conséquence de cette formule est que l'aire du parallélogramme ne se calcule pas en multipliant entre eux la longueur de ses côtés, erreur extrêmement fréquente. Dans le parallélogramme ABCD de la figure suivante, les longueurs AB et AH sont proches l'une de l'autre et on peut être tenté d'appliquer au parallélogramme la formule de calcul d'aire du rectangle en multipliant les côtés entre eux... ce qui est faux, l'aire du parallélogramme ABCD est égale à $BC \times AH$ et non à $BC \times AB$.

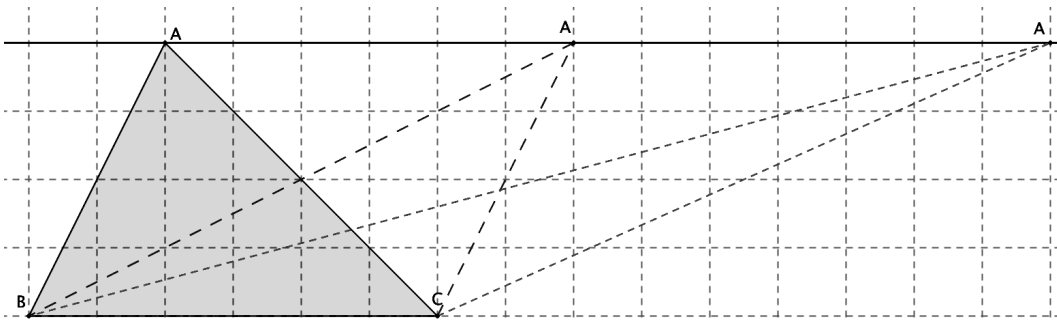


Enfin, la formule de calcul d'aire du parallélogramme montre que si la base du parallélogramme ne change pas et sa hauteur non plus, l'aire ne change pas :

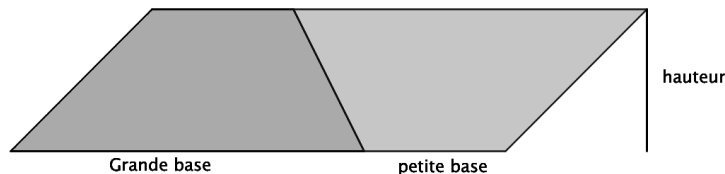
- La figure suivante montre comment on peut déformer le parallélogramme ABCD en faisant « glisser » le côté [AD]. La base du parallélogramme ne change pas, sa hauteur non plus, donc l'aire ne change pas. Les trois versions du parallélogramme ABCD dessinées sur cette figure ont des aires égales.



- Il en va de même si on déplace un sommet d'un triangle parallèlement au côté opposé. La hauteur et la base du triangle ne changeant pas, son aire ne change pas non plus. Les trois versions du triangle ABC de la figure suivante ont donc des aires égales.



Aire du trapèze

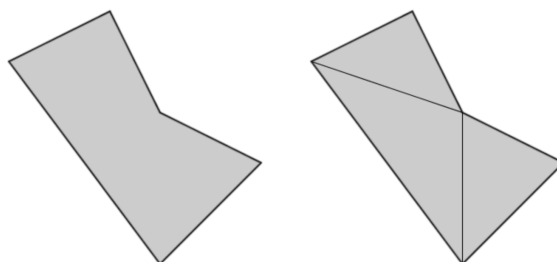


Il est toujours possible d'assembler deux trapèzes identiques pour former un parallélogramme. L'aire de chaque trapèze est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. C'est ce que traduit la formule de calcul d'aire du trapèze, où B et b désignent les mesures de longueur des deux bases :

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{(B+b) \times \text{hauteur}}{2}$$

Aire des autres polygones

Il est toujours possible de découper un polygone en triangles. Cela fournit une façon de calculer l'aire d'un polygone quelconque : c'est la somme des aires des morceaux triangulaires.



Aire du disque et circonférence du cercle

La circonférence du cercle est son périmètre, c'est une longueur. Elle n'a donc en principe aucune raison de figurer dans ce chapitre sur les aires. Néanmoins, nous avons souvent constaté des hésitations sur l'utilisation des formules « $2 \times \pi \times R$ » et « $\pi \times R^2$ », c'est pourquoi nous allons essayer ici de clarifier leur signification.

Tout d'abord, dans ces formules R désigne la longueur du rayon du cercle. π est un nombre un peu plus grand que 3, donc $2 \times \pi$ vaut un peu plus que 6. L'expression $2 \times \pi \times R$ signifie donc « un peu plus que 6 fois le rayon du cercle ». Bien entendu, six fois une longueur, c'est une longueur, cette formule permet de calculer la circonférence du cercle (ce qu'on appelle le périmètre pour les autres figures).

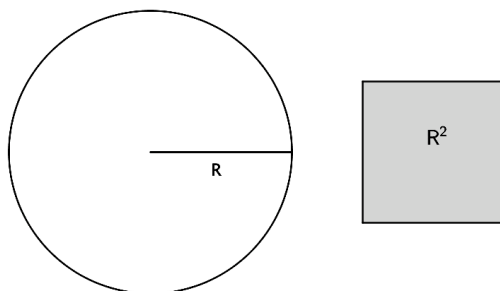
$$\text{Circonférence du cercle} = 2 \times \pi \times R$$

R^2 , autrement dit $R \times R$, désigne l'aire d'un carré ayant pour côté le rayon du cercle. $\pi \times R^2$ c'est donc un peu plus de trois fois l'aire de ce carré. Il s'agit de la formule permettant de calculer l'aire du disque (autre bizarrerie : alors que pour un carré ou un triangle, le même mot désigne à

la fois la ligne qui fait le tour de la figure et la surface intérieure, dans le cas des figures rondes la ligne s'appelle cercle et la surface intérieure s'appelle disque). La formule affirme donc qu'il faut un peu plus que trois carrés comme celui de la figure pour recouvrir le disque.

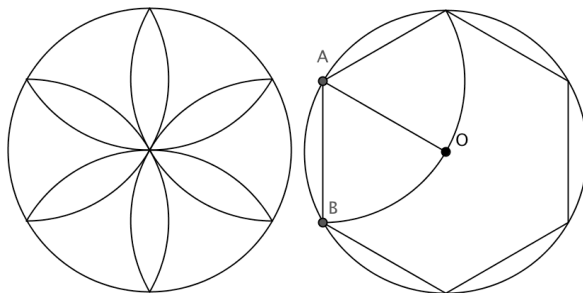
$$\text{Aire du disque} = \pi \times R^2$$

L'utilisation de la même lettre π dans les deux formules indique également que le nombre de carrés nécessaires pour recouvrir le disque est exactement le même que le nombre de diamètres nécessaires pour faire le tour du cercle.



Nous ne disposons pas de techniques élémentaires permettant de prouver ces formules, nous pouvons cependant nous convaincre que les estimations « un peu plus de 6 fois le rayon » pour la circonférence, et « un peu plus de trois fois le carré ayant pour côté le rayon » pour l'aire sont raisonnables. . .

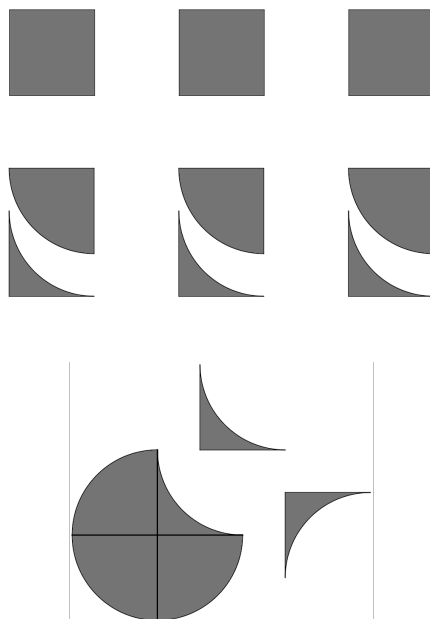
Vous avez probablement tracé à l'école élémentaire des rosaces comme celle-ci, et vous vous souvenez que tous les arcs de cercle qu'on utilise ont le même rayon, celui du cercle initial.



Effaçons la rosace et traçons un polygone joignant ses pointes. Chaque côté de ce polygone a la même longueur que le rayon du cercle.

Le périmètre de ce polygone est donc égal à $6 \times R$. Effectuons maintenant un tour du cercle. Pour aller de A à B, on parcourt un arc de cercle et non le segment [AB], la distance parcourue est donc (légèrement) plus longue. Il en est de même pour chacune des six portions à parcourir. La circonférence du cercle est donc légèrement plus longue que celle du polygone, c'est à dire légèrement plus longue que $6 \times R$.

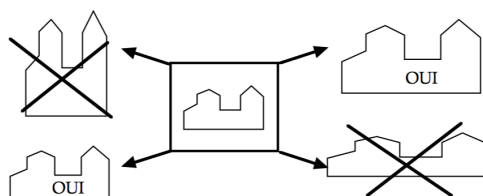
Les illustrations suivantes montrent comment, avec trois carrés dont les côtés ont la même longueur que le rayon du cercle, on remplit presque le cercle. L'aire du disque est donc voisine de $3 \times R^2$.



Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires.

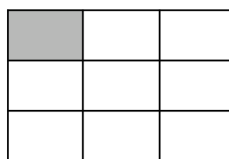
Agrandissements

Quand on emploie le mot agrandissement en mathématiques, cela indique bien sûr qu'une figure devient plus grande, mais cela indique aussi, comme en photographie, que la figure agrandie garde la même forme que la figure de départ.



Dans un agrandissement, les longueurs sont toutes multipliées par un même nombre qu'on appelle le coefficient ou le rapport de l'agrandissement (et qui est souvent noté k).

Dans un agrandissement de coefficient k , les aires sont multipliées par le carré de k .



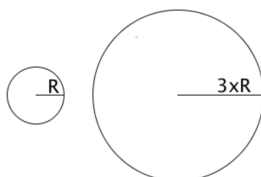
Cette propriété est facile à comprendre pour les rectangles. Appliquons au rectangle gris un agrandissement de coefficient 3. Il est facile de constater que le rectangle obtenu contient 9 rectangles gris, l'aire a bien été multipliée par 9, c'est-à-dire par 3^2 .

Quand on effectue le même agrandissement de coefficient 3 sur un triangle ou un parallélogramme, la figure agrandie peut encore être découpée en neuf morceaux identiques à la figure initiale.



Cependant, pour la plupart des figures, ce découpage est impossible. On ne peut pas, par exemple, découper 9 petits disques de rayon R dans un grand disque de rayon $3R$.

Montrons que la propriété est néanmoins vraie pour un disque auquel on applique un agrandissement de coefficient 3.



Si on note R le rayon du petit disque, le grand disque a un rayon égal à $3R$.

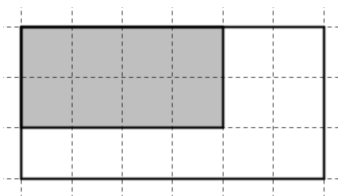
L'aire du grand disque est donc égale à $\pi \times (3R)^2$ soit $\pi \times 3R \times 3R$ ou $3 \times 3 \times \pi \times R \times R$ ou encore $3^2 \times (\pi \times R^2)$.

La dernière écriture montre exactement ce que l'on veut prouver : l'aire du grand disque est égale à l'aire du petit disque multipliée par le carré du coefficient d'agrandissement.

La démonstration faite ci-dessus ne convient pas seulement avec 3, on pourrait faire la même chose avec n'importe quel nombre positif.

En revanche, prouver que la propriété énoncée est vraie pour toutes les figures est hors de portée des outils dont nous disposons.

Réductions



Le coefficient de l'agrandissement qui, à partir du petit rectangle gris, donne le grand rectangle est 1,5 ou $3/2$. Que peut-on dire de la réduction correspondante, celle qui permet d'obtenir le rectangle gris à partir du grand ?

Pour réduire, on peut diviser les longueurs par $3/2$, mais $3/2$ n'est pas le coefficient de la réduction. On peut également multiplier les longueurs par $2/3$. Par convention, c'est ce nombre $2/3$ qu'on appelle coefficient de la réduction (c'est l'inverse de $3/2$).

L'intérêt de cette convention est qu'ainsi tout ce qui a été dit pour l'agrandissement reste valable pour la réduction, aucune connaissance nouvelle n'est nécessaire.

Dans une réduction les longueurs sont toutes multipliées par un même nombre k qu'on appelle le coefficient ou le rapport de la réduction.

Dans une réduction de coefficient k , les aires sont multipliées par le carré de k .

La seule différence entre agrandissement et réduction du point de vue du calcul est la valeur du coefficient : le coefficient d'une réduction est compris entre 0 et 1, alors que le coefficient d'un agrandissement est plus grand que 1.

Dans quelles situations peut-on utiliser ces connaissances ?

Évidemment, à chaque fois que l'énoncé d'un problème parle d'agrandissement ou de réduction. Mais il y a aussi des cas où un agrandissement existe et peut être utilisé sans être explicitement mentionné. En effet, certains noms de figures géométriques correspondent à une seule forme possible.

Il y a de nombreux triangles différents, de nombreux quadrilatères différents, même les rectangles n'ont pas tous la même forme, en revanche deux cercles ne diffèrent que par leur taille, l'un des deux est un agrandissement de l'autre.

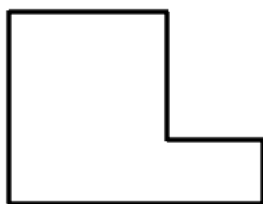
Il en va de même pour les carrés, les triangles équilatéraux et de façon générale pour tous les polygones réguliers (polygones dont tous les angles et tous les côtés sont égaux) parmi lesquels les hexagones réguliers, qui sont d'un usage assez fréquent.

C'est également le cas des triangles isocèles rectangles (qui ne sont rien d'autre que des demi-carrés).

Exercices

Exercice 1

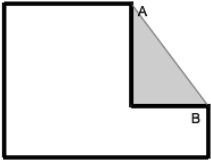

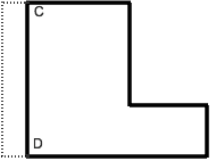
Considérons la figure suivante, que l'on a découpée dans du papier.



Pour effectuer le travail qui suit, il n'est pas nécessaire de respecter les dimensions de la figure. N'importe quelle surface ayant la même allure de L majuscule, avec des angles droits, conviendra. La précision n'est pas le but recherché : des dessins à main levée suffiront.

Nous allons chercher à placer dans chacune des cases du tableau suivant une figure obtenue à partir de la surface modèle en utilisant des transformations naïves : couper et enlever un morceau, ajouter un morceau découpé dans un autre papier...

Deux figures sont déjà placées à titre d'exemple.

	Le périmètre a diminué.	Le périmètre n'a pas changé.	Le périmètre a augmenté.
L'aire a augmenté.			
L'aire n'a pas changé.			
L'aire a diminué.			

Dans la case en haut à gauche, on a collé un triangle rectangle gris dans le creux de la figure modèle. L'aire a ainsi augmenté (la surface obtenue contient les centimètres carrés du modèle plus ceux du triangle gris). Le périmètre a diminué, en effet le périmètre est la longueur du trait qui fait le tour de la figure. Parcourons le tour des figures en partant du point A, vers la gauche. De A à B, le parcours est le même que l'on utilise le modèle ou la nouvelle figure. Pour terminer le tour, de B à A, sur la nouvelle figure, on parcourt le segment [BA] alors que pour le modèle on ne suit pas la ligne droite, le trajet est donc plus long. Le périmètre de la nouvelle figure est donc plus court que celui du modèle.

Dans la case en bas à gauche, on a coupé et enlevé au modèle un morceau rectangulaire, qui apparaît en pointillé. La nouvelle figure contient moins de centimètres carrés que le modèle, son aire est plus petite. Quand on parcourt le tour des deux figures, le trajet ne change qu'entre C et D. De C à D, le trajet est plus court pour la nouvelle figure (on suit le segment [CD]) que pour le modèle (on fait un détour). Le périmètre a donc diminué.

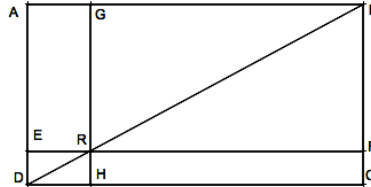
Prenez le temps de chercher à remplir les sept cases restantes (sans oublier la case centrale, avec une figure différente du modèle). En ce qui concerne les aires, le principe est simple : si on ajoute un morceau, l'aire augmente. Si on enlève un morceau, l'aire diminue. Pour conserver la même aire, il suffit de découper le modèle et de déplacer un des morceaux : les centimètres carrés qui remplissaient le modèle remplissent aussi la nouvelle figure, même si certains se sont déplacés.

Vous essaieriez d'effectuer vos comparaisons dans l'esprit des deux exemples ci-dessus sans utiliser aucun nombre.

Exercice 2

ABCD est un rectangle tel que $AB = 13$ cm et $BC = 7$ cm. R est le point de $[BD]$ tel que $BR = 12$ cm. La parallèle à (AB) passant par R coupe (AD) en E et (BC) en F. La parallèle à (AD) passant par R coupe (AB) en G et (DC) en H.

Comparez les aires des rectangles AGRE et FRHC.

**Exercice 3**

Combien peut-on découper de rectangles de 7 cm sur 5 cm dans un rectangle de 24 cm sur 17 cm ?

Exercice 4

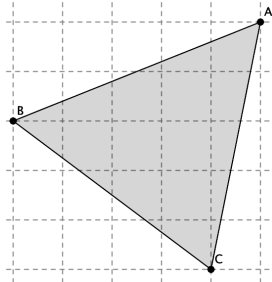
ABCD est un rectangle. M est le milieu de $[AD]$, N le milieu de $[AB]$ et R celui de $[DC]$. $[BD]$ et $[NC]$ se coupent en S.

Comparer les aires des triangles DNS et BSC.

Comparer les aires des quadrilatères MNBD et MNRD.

Exercice 5

En utilisant comme unité de longueur le côté d'un carreau du quadrillage, et comme unité d'aire le carreau, calculer l'aire de ce triangle.

**Exercice 6**

Sur papier quadrillé, tracer (si possible) un carré dont l'aire est égale à l'aire de 10 carreaux et dont les sommets sont des nœuds du quadrillage. Même question avec 13 carreaux puis 30 carreaux.

Exercice 7

Partager un triangle quelconque en deux parties d'aires égales.

Exercice 8

Partager un quadrilatère quelconque en deux parties d'aires égales.

Exercice 9

On donne un rectangle ABCD, construire un rectangle ACEF ayant une aire égale à celle de ABCD.

Exercice 10

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. H est le pied de la hauteur issue de A.

Calculer AH.

Exercice 11

Tracer un cercle de centre O et de rayon r. Tracer deux diamètres perpendiculaires, [AB] et [CD]. Tracer le cercle de centre C et passant par A. Ce cercle coupe [CD] en E. Exprimer l'aire de la lunule ADBE en fonction de r.

Exercice 12

Sur une feuille quadrillée, tracer cinq quadrilatères non superposables respectant simultanément ces deux critères :

- Les sommets des quadrilatères sont tous situés sur les nœuds du quadrillage.
- L'aire de chaque quadrilatère est égale à l'aire d'un carreau du quadrillage.

Exercice 13

On agrandit une photographie rectangulaire dont l'aire mesure 160 centimètres carrés.

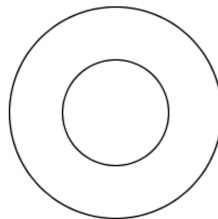
Dans l'agrandissement, la longueur de cette photographie augmente de 25%.

Quelle est l'aire de la photographie agrandie ?

Exercice 14

Sur cette figure, le rayon du grand cercle est le double du rayon du petit cercle. L'aire de la couronne (c'est-à-dire de la surface située entre les deux cercles) mesure exactement 30 cm^2 .

Combien mesure l'aire du grand disque ?



Indications sur les exercices

Exercice 1

Si vous avez choisi une case et ne parvenez pas à inventer une figure qui convient, utilisez la démarche inverse : inventez une figure sans chercher trop de complications, en ajoutant un petit morceau au modèle, ou en enlevant un morceau, ou encore en déplaçant un morceau... cette figure va nécessairement dans une des cases du tableau. Avec un peu de chance, elle va dans une des cases encore vides.

Exercice 2

- L'énoncé de cet exercice fait tout son possible pour vous aiguiller sur la voie du calcul. Les théorèmes de Pythagore et de Thalès semblent appropriés. Résistez à cette tentation et cherchez comment il est possible d'obtenir chacun des rectangles en s'appuyant sur un découpage du rectangle ABCD.
- Une diagonale d'un rectangle partage le rectangle en deux triangles superposables, qui ont donc la même aire.

Exercice 3

Indications pour ceux qui ont effectué des calculs :

Vos calculs montrent probablement que l'aire du grand rectangle est supérieure à l'aire de 11 petits rectangles, mais inférieure à celle de 12 petits rectangles.

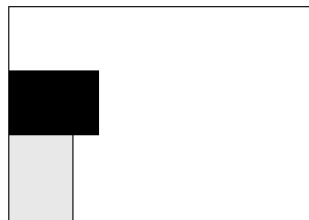
Nous pouvons en conclure qu'il est impossible de placer 12 petits rectangles dans le grand. En revanche, il n'est pas possible de conclure qu'on peut placer 11 petits rectangles.

Imaginons un rectangle de 408 cm de long et 1 cm de large. Son aire est 408 cm^2 , il est pourtant impossible d'y découper 11 petits rectangles (ni même un seul).

Vous devez donc prouver qu'il est possible de placer 11 rectangles, par exemple en dessinant une disposition qui convient.

Indications pour ceux qui ont réalisé des dessins :

- Si vous ne parvenez à placer que 8 ou 9 petits rectangles dans le grand, vous vous êtes probablement imposé de les orienter tous dans la même direction... ce qui est parfois une bonne idée. Cependant, rien n'interdit dans cet exercice de placer des rectangles ainsi :



- Les dimensions du grand rectangle et des petits rectangles devraient vous aider à imaginer des dispositions intéressantes, en effet $17 = 5 + 5 + 7$ et $24 = 5 + 5 + 7 + 7$.

Exercice 4

- Essayez d'obtenir chacun des triangles à comparer en combinant d'autres polygones de la figure. Par exemple l'aire du triangle DNS est égale à celle du quadrilatère ANSD moins celle du triangle AND.
- Comparez les aires des triangles DCN et DCB puis cherchez le lien avec les triangles de l'énoncé.
- La deuxième question peut se résoudre dans le même esprit, mais on peut aussi découper les quadrilatères en figures plus petites.

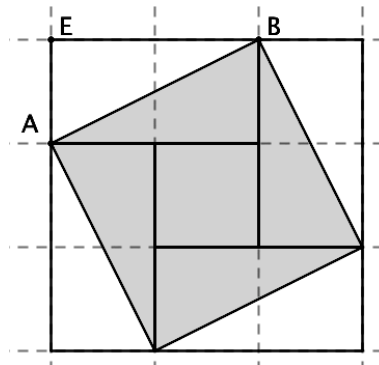
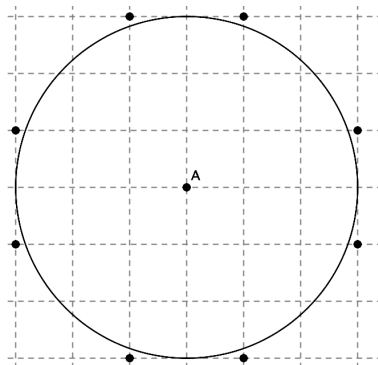
Exercice 5

Pour calculer l'aire d'un triangle, il est possible d'utiliser la formule classique, mais il est également possible de procéder par découpage du triangle en parties plus petites, ou encore d'obtenir le triangle en retirant des parties à une figure plus grande.

Dans le cas de notre triangle, seule une de ces trois approches conduit à des calculs simples.

Exercice 6

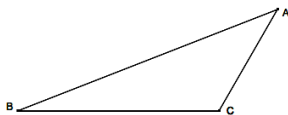
- L'énoncé impose que les sommets soient situés sur les nœuds du quadrillage, il n'impose pas que les côtés soient tracés sur les lignes.
- Les côtés du carré peuvent ne suivre ni les lignes ni les diagonales des carreaux.
- Si l'aire d'un carré mesure 10, son côté mesure un peu plus de 3. Pour être plus précis, il mesure $\sqrt{10}$ soit environ 3,1623, mais « un peu plus de 3 » nous suffira pour la phase de recherche. Choisissez un nœud du quadrillage, nommez le A, ce sera le premier sommet de votre carré. Tracez un cercle de centre A et de rayon 3. Les nœuds situés légèrement à l'extérieur du cercle sont de bons candidats à être le point B, afin que [AB] soit un côté du carré. Il reste alors à vérifier si le carré qui a ce côté a bien une aire de 10 carreaux comme nous le souhaitons.



- Sur la figure de droite, l'aire du carré dont [AB] est un côté peut se calculer en le découpant en un petit carré et quatre triangles rectangles. Il est possible aussi d'enlever quatre triangles rectangles d'un carré plus grand.
- Il est également possible de calculer l'aire du carré de côté [AB] en appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABE. Si vous pensez qu'une aire est impossible à obtenir, la propriété de Pythagore peut également servir à le prouver.

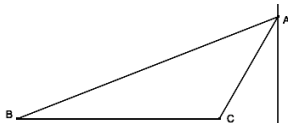
Exercice 7

- Avant de chercher des découpages compliqués, demandez-vous si une des droites remarquables du triangle (hauteurs, médianes, bissectrices, médiatrices) permet d'obtenir le découpage cherché. C'est une occasion de revoir une définition précise de ces droites. Tracez un triangle et une de ses hauteurs, une médiane, une bissectrice, une médiatrice et observez.
- Peut-être avez-vous fait vos essais avec un triangle équilatéral ou isocèle. Or, dans un triangle isocèle en A, la hauteur issue de A, la médiane issue de A, la bissectrice de l'angle $\hat{B}\hat{A}C$ et la médiatrice de $[BC]$ sont confondues : il s'agit d'un axe de symétrie du triangle. Cela ne permet pas de savoir si l'une de ces droites convient pour n'importe quel triangle. Recommencez avec un triangle non isocèle, par exemple celui-ci, sur lequel vous tracerez la hauteur issue de A, la médiane issue de A, la bissectrice de l'angle $\hat{B}\hat{A}C$ et la médiatrice de $[BC]$. Cela vous permettra de procéder par élimination : les droites qui ne partagent pas ce triangle en deux parties de même aire ne peuvent pas convenir pour tous les triangles.



- Voici les quatre tracés envisagés à l'étape précédente :

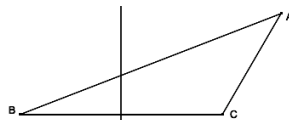
La hauteur issue de A est à l'extérieur du triangle, elle ne partage pas le triangle en deux parties d'aires égales.



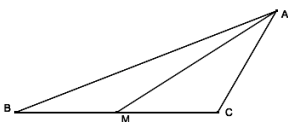
La bissectrice de l'angle $\hat{B}\hat{A}C$ partage le triangle en deux parties dont les aires sont manifestement différentes.



La médiatrice de $[BC]$ partage le triangle en deux parties dont les aires sont manifestement différentes.



Par élimination, seule la médiane issue de A semble partager le triangle en deux parties d'aires égales. Essayez de prouver que c'est bien le cas. Si vous n'y parvenez pas, il faudra chercher un autre découpage.

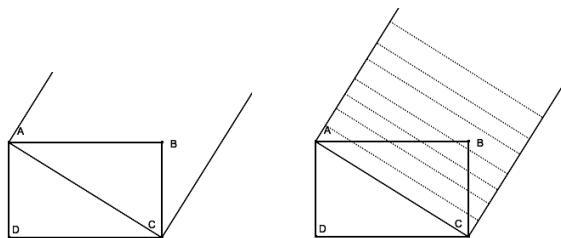


Exercice 8

- Essayez d'utiliser le résultat de l'exercice précédent. L'énoncé n'impose pas que le partage se fasse par une seule droite.
- Il est toujours possible de partager en deux triangles un quadrilatère non croisé par une de ses diagonales.

Exercice 9

- Rappelons tout d'abord la convention en usage pour nommer les polygones : le nom du polygone est obtenu à partir des noms de ses sommets, en tournant autour du polygone (le point de départ ainsi que le sens du parcours sont libres. Ainsi, le segment $[AC]$ est une diagonale du rectangle $ABCD$, mais c'est un côté du rectangle $ACEF$ que vous devez tracer.
- $[AC]$ étant un côté du rectangle cherché, on peut tracer ses perpendiculaires passant par A et par C , il reste seulement à placer le côté $[EF]$.



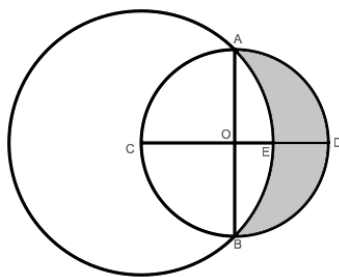
- Sur la figure de droite, les segments en pointillés sont des candidats au rôle de segment $[EF]$. Certaines positions conduiraient à une aire trop petite, d'autres à une aire trop grande, cherchez à estimer dans quelle position les deux rectangles auraient des aires à peu près égales. Vous pouvez aussi faire des dessins au brouillon, mesurer les côtés des rectangles et calculer les aires à partir de ces mesures. Cela devrait vous donner une idée de la place correcte de $[EF]$.

Exercice 10

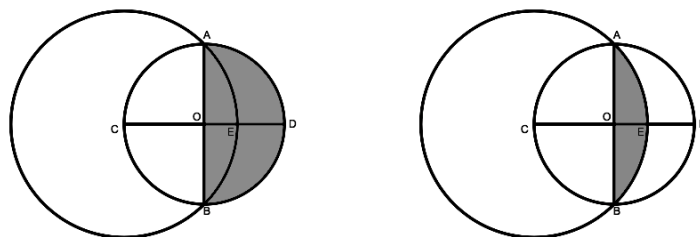
- Il y a plusieurs façons de calculer l'aire d'un triangle
- En écrivant deux façons différentes de calculer l'aire du triangle ABC , on obtient deux expressions égales, dont l'une utilise AH .

Exercice 11

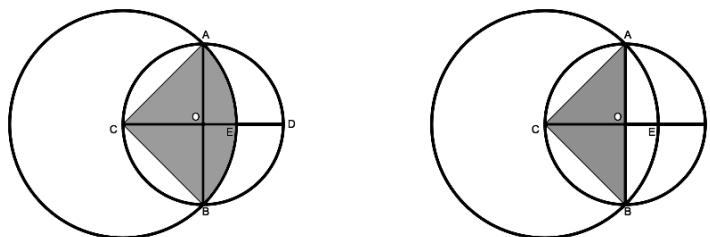
- La surface dont vous devez calculer l'aire est grisée sur cette figure.



- Ne vous précipitez pas vers les calculs, commencez par choisir la méthode que vous utiliserez pour obtenir la lunule : assemblerez-vous des surfaces plus petites ? Enlèverez-vous des morceaux à une surface plus grande ?
- On sait calculer l'aire d'un triangle et celle d'un disque (donc également d'un demi-disque ou d'un quart de disque). Si dans votre plan vous prévoyez d'utiliser des surfaces qui ne sont ni des triangles, ni des disques, ni des fractions de disques, il faut continuer à préciser votre plan : par quel assemblage ou découpage envisagez-vous d'obtenir ces surfaces ?
- Une façon d'obtenir la lunule consiste à partir du demi-disque de la figure de gauche auquel on enlève la surface grisée sur la figure de droite :



Pour calculer l'aire de la surface à enlever, on peut partir du quart de disque de la figure de gauche, auquel on enlève le triangle de la figure de droite :



- En appliquant les formules de calcul d'aire connues à la méthode décrite ci-dessus, vous obtenez peut-être une expression comportant le rayon r du petit cercle, mais aussi le rayon R du grand cercle. Ce n'est pas tout-à-fait ce qui est demandé, il vous faut encore trouver une relation entre R et r pour exprimer l'aire de la lunule sans utiliser R .

Exercice 12

Retrouvez une remarque faite dans la partie cours à propos de l'aire du parallélogramme. Au besoin, allez la relire et cherchez à la réinvestir dans cet exercice.

Exercice 13

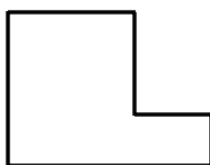
Pour utiliser les connaissances à propos de l'agrandissement, il est utile de connaître le coefficient de l'agrandissement, c'est-à-dire le nombre par lequel toutes les longueurs sont multipliées. Or ce nombre n'est pas donné, il est question d'une augmentation en pourcentage. Vous avez donc besoin de traduire l'expression « augmenter de 25% » sous la forme « multiplier par... ». Si vous ne savez pas faire cela, c'est le bon moment pour consulter la partie sur les pourcentages, page 218.

Exercice 14

- Tous les cercles ont la même forme, le grand cercle est un agrandissement du petit.
- Utilisez les écritures littérales en utilisant une seule lettre qui désignera par exemple la mesure de l'aire du petit disque. Comment désigner alors l'aire du grand disque ? et celle de la couronne ?

Solutions des exercices**Exercice 1**

Rappelons que la figure initiale est celle ci. “Le périmètre a diminué” signifie que la figure transformée placée dans le tableau a un périmètre plus petit que celle-ci.



	Le périmètre a diminué.	Le périmètre n'a pas changé.	Le périmètre a augmenté.
L'aire a augmenté.			
L'aire n'a pas changé.			
L'aire a diminué.			

Sur toutes les figures, les traits en pointillés montrent les parties du modèle qui ont été modifiées. Les raisonnements qui suivent suffisent à conclure que les figures proposées ont bien les propriétés demandées.

Pour l'aire :

- Pour augmenter l'aire, on a ajouté un morceau à la surface.
- Pour diminuer l'aire on a enlevé un morceau à la surface.

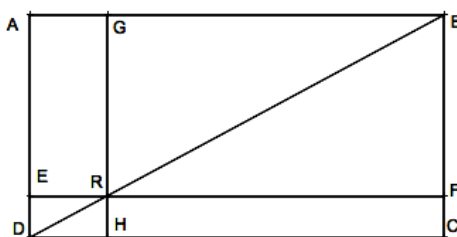
— Pour conserver l'aire, on a découpé un morceau de la surface qu'on a replacé ailleurs.

Pour le périmètre :

- Le plus court chemin d'un point A à un point B est le segment [AB] (cela permet de conclure dans les cas où le périmètre a été modifié).
- Les côtés opposés d'un rectangle sont égaux (cela permet de conclure dans les cas où le périmètre n'a pas été modifié).

Bien entendu, il existe de nombreuses autres figures correctes pour chacune des cases.

Exercice 2



Première solution :

Un rectangle est partagé par une de ses diagonales en deux triangles superposables. On a donc :

$\text{Aire}(\text{ABD}) = \text{Aire}(\text{CBD})$. Appelons X cette aire commune.

$\text{Aire}(\text{GBR}) = \text{Aire}(\text{FBR})$. Appelons Y cette aire commune.

$\text{Aire}(\text{EDR}) = \text{Aire}(\text{HDR})$. Appelons Z cette aire commune.

Chacun des deux rectangles étudiés peut s'obtenir à partir d'un grand triangle rectangle dont on enlève deux petits triangles rectangles, leurs aires sont toutes les deux égales à $X - Y - Z$, les deux rectangles ont donc des aires égales.

Cette solution n'est pas seulement plus simple que celles qui cherchent à calculer les dimensions des rectangles afin de calculer l'aire, elle est également beaucoup plus puissante. En effet, le raisonnement reste valable si vous changez les dimensions du rectangle ABCD ou la position du point R sur la diagonale. Si vous étiez parvenu à l'égalité des aires par le calcul, vous ne pourriez pas exclure qu'il s'agisse d'une coïncidence due aux nombres choisis. Pour de nouvelles mesures, il faudrait donc recommencer le travail pour de nouvelles mesures.

Il est toutefois possible d'utiliser subtilement le théorème de Thalès pour parvenir à une conclusion générale, qui résiste à la déformation du rectangle ABCD et au déplacement du point R, mais cette solution n'est pas vraiment dans l'esprit du présent chapitre.

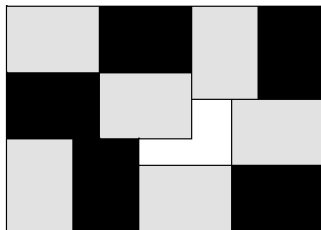
Deuxième solution :

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles DRH et GRB, on montre que $\frac{RH}{RG} = \frac{DR}{RB}$.

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles EDR et BRF, on montre que $\frac{RE}{RF} = \frac{DR}{RB}$.

En rapprochant ces deux résultats, on obtient $\frac{RH}{RG} = \frac{RE}{RF}$ d'où on tire $RH \times RF = RE \times RG$ ce qui prouve l'égalité des aires des deux rectangles.

Exercice 3



Cette figure, réalisée en vraies dimensions ou à l'échelle, suffit à montrer qu'il est possible de découper 11 petits rectangles de 5 cm sur 7 cm dans le rectangle de 17 cm sur 24 cm.

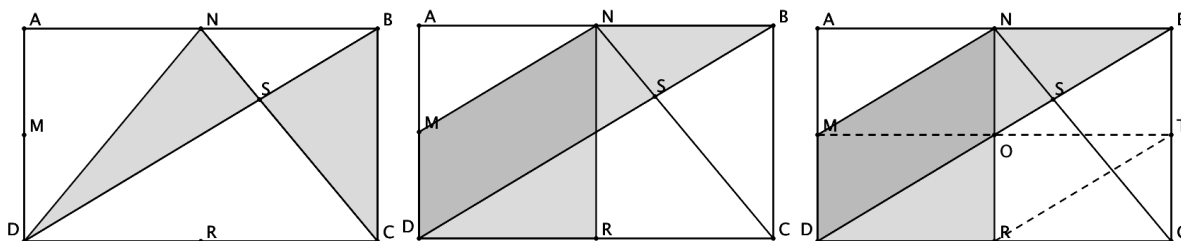
On ne peut pas en placer plus, en effet la surface restante tient entièrement à l'intérieur d'un rectangle de 5 cm sur 7 cm, son aire n'est donc pas suffisante pour découper un autre rectangle (si on déplace les 11 rectangles déjà tracés, la surface restante changera de forme, mais pas d'aire).

Remarques :

- Une solution complète doit absolument comporter deux éléments : un dessin montrant comment il est possible d'obtenir 11 rectangles et une considération sur les aires (celle qui précède ou un calcul) prouvant qu'on ne peut pas placer 12 rectangles.
- Il peut arriver qu'on sache expliquer l'impossibilité de placer 12 rectangles, mais qu'on ne réussisse pas à en placer 11. Supposons par exemple qu'on ait réussi à en placer seulement 10. Comment faut-il alors conclure ? La seule conclusion acceptable ressemble à ceci :
 - Il est impossible de placer 12 rectangles parce que...
 - Il est possible de placer 10 rectangles comme ceci (un dessin est joint).
 - Pour terminer le problème, il faudrait ou placer 11 rectangles, ou prouver que c'est impossible, ce que je ne sais pas faire.

Une telle conclusion ne vous satisfait peut-être pas, mais la rigueur intellectuelle du candidat écrivant cela impressionnerait à coup sûr favorablement le jury.

Exercice 4



Question 1

L'aire du triangle DNS est égale à celle du triangle DCN moins celle de DSC.

L'aire du triangle BSC est égale à celle du triangle DCB moins celle de DSC.

Or, les aires des triangles DCN et DCB sont égales chacune à la moitié de l'aire du rectangle ABCD, elles sont donc égales entre elles. Il en résulte que les aires de DNS et BSC sont égales.

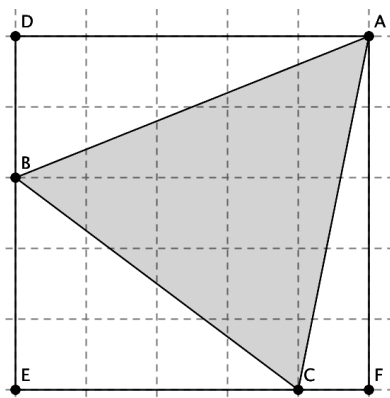
Remarque : un raisonnement proche, en partant d'autres triangles que DCN et DCB, est possible.

Question 2

On obtient les quadrilatères MNBD et MNRD en retirant le triangle MNA au rectangle ANRD d'une part, au triangle ABD d'autre part. Or les aires de ANRD et ABD sont égales chacune à la moitié de l'aire du rectangle ABCD. Il en résulte que les aires de MNBD et MNRD sont égales.

On peut également placer le point T , milieu de $[BC]$. En traçant les segments $[MT]$ et $[RT]$, on obtient un découpage du rectangle ABCD en huit triangles rectangles identiques. Les quadrilatères à comparer sont chacun formés de trois de ces triangles, ils ont donc des aires égales.

Exercice 5



La figure ci-dessus montre que le triangle ABC peut être obtenu en retirant trois triangles rectangles au carré ADEF. Il en résulte que :

$$\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(AFED) - \text{Aire}(ABD) - \text{Aire}(BEC) - \text{Aire}(ACF)$$

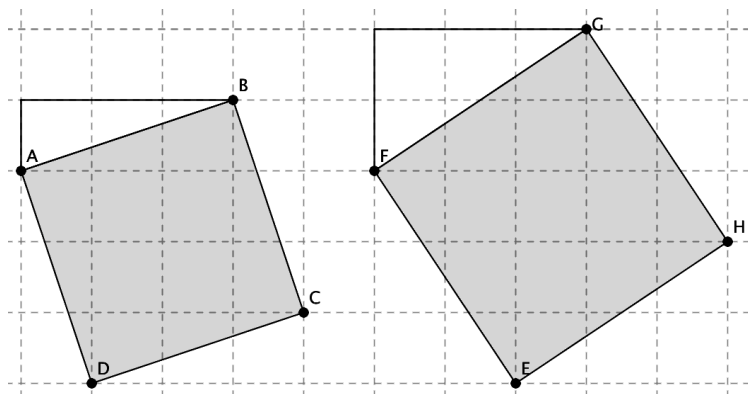
$$\text{Aire}(ABC) = 5 \times 5 - \frac{5 \times 2}{2} - \frac{4 \times 3}{2} - \frac{5 \times 1}{2}$$

$$\text{Aire}(ABC) = 25 - 5 - 6 - \frac{5}{2}$$

$$\text{Aire}(ABC) = 14 - \frac{5}{2} = \frac{28}{2} - \frac{5}{2} = \frac{23}{2}$$

L'aire du triangle ABC est donc égale à 11,5 carreaux.

Exercice 6



En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle dessiné à l'extérieur de chaque carré, on obtient :

$$AB^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \quad \text{et} \quad FG^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Les carrés ABCD et EFGH ont respectivement une aire de 10 carreaux et 13 carreaux.

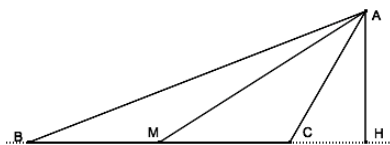
Supposons qu'il existe un carré d'aire égale à 30 et dont les sommets sont sur les nœuds du quadrillage. Appelons a et b les mesures des côtés de l'angle droit du triangle tracé à l'extérieur du carré de façon analogue à celui que nous avons utilisé pour les deux carrés précédents.

On aurait alors $a^2 + b^2 = 30$. Or a et b sont entiers, les valeurs possibles pour a^2 et b^2 sont donc à choisir parmi les nombres suivants : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25.

Il n'existe aucune somme de deux nombres choisis dans cette liste qui soit égale à 30, il est donc impossible d'obtenir le carré d'aire 30 demandé.

Exercice 7

Démontrons que la médiane [AM] partage le triangle ABC en deux triangles d'aires égales.



Calculons l'aire de ABM en prenant comme base le côté [BM] : $Aire(ABM) = \frac{BM \times AH}{2}$

Calculons l'aire de ACM en prenant comme base le côté [CM] : $Aire(ACM) = \frac{CM \times AH}{2}$

M est le milieu de [BC] donc $BM = CM$, donc les triangles ABM et ACM ont des aires égales.

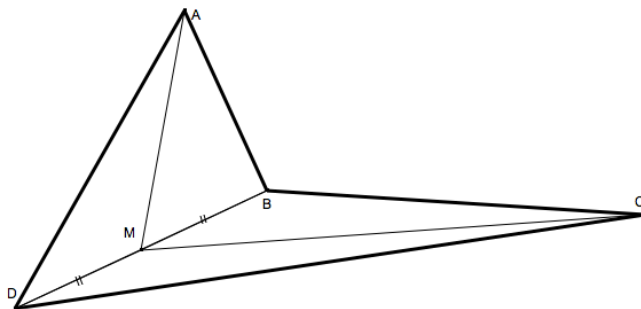
Exercice 8

Sur la figure qui suit, M est le milieu de la diagonale [BD] du quadrilatère ABCD.

$$Aire(AMCB) = Aire(AMB) + Aire(CMB).$$

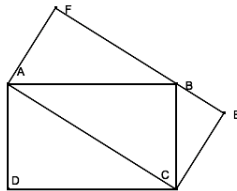
$$Aire(AMCD) = Aire(AMD) + Aire(CMD)$$

La question précédente montre que l'aire de AMB est égale à celle de AMD et que l'aire de CMB est égale à celle de CMD, il en résulte que les aires de AMCB et de AMCD sont égales, le quadrilatère ABCD est partagé en deux parties d'aires égales.



Exercice 9

Construisons le rectangle ACEF de façon à ce que Le point B soit sur [EF].



Les aires des rectangles ABCD et ACEF sont égales, en effet chacune d'entre elles est le double de l'aire du triangle ABC.

Remarques :

Si vous n'êtes pas convaincu que chaque rectangle a une aire double de celle de ABC, relisez la partie de cours sur le calcul de l'aire d'un triangle.

On pouvait évidemment choisir de faire passer le côté [EF] par D et non par B.

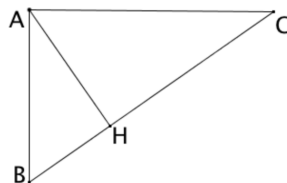
Exercice 10

Le triangle ABC est rectangle en A, le théorème de Pythagore permet donc d'affirmer que $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100$. Il en résulte que $BC = 10$.

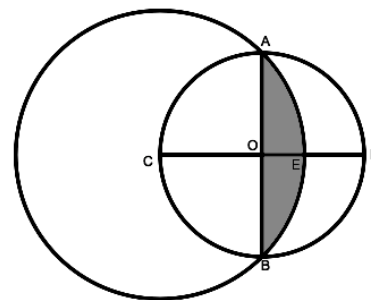
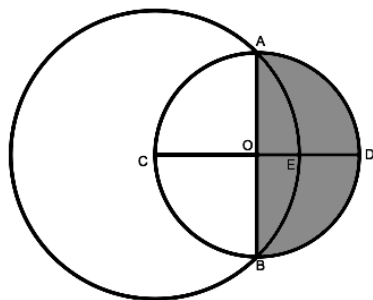
La mesure de l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AB \times AC}{2}$ soit $\frac{6 \times 8}{2}$ ou 24 cm^2 .

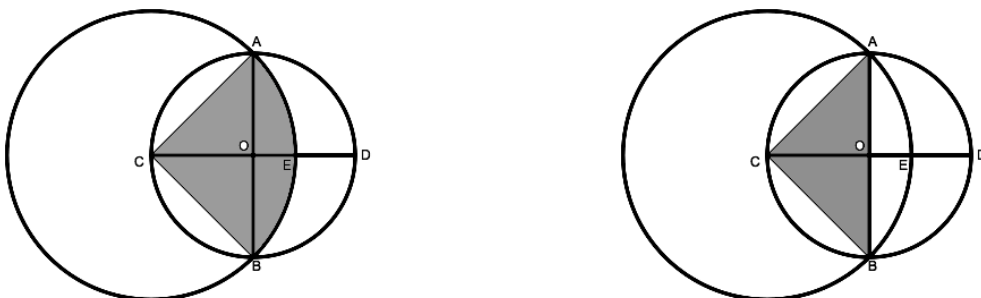
La mesure de l'aire du triangle ABC est aussi égale à $\frac{BC \times AH}{2}$ soit $\frac{10 \times AH}{2}$ ou $5AH$.

On a donc $5AH = 24$ d'où $AH = \frac{24}{5} = 4,8$. La hauteur [AH] mesure 4,8 cm.

**Exercice 11**

Pour abrégé la rédaction de ce corrigé, nous appellerons A_1 A_2 A_3 et A_4 dans cet ordre l'aire des surfaces grisées suivantes :





Par ailleurs, nous noterons R le rayon du grand disque.

$A_1 = \frac{\pi \times r^2}{2}$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un demi-disque.

$A_3 = \frac{\pi \times R^2}{4}$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un quart de disque.

$A_4 = r^2$, ce qu'on peut voir soit en calculant l'aire du triangle ABC en choisissant comme base $AB = 2r$ et comme hauteur $OC = r$, soit en remarquant qu'à l'aide des triangles AOC et BOC on peut former un carré dont le côté mesure r .

On obtient alors : $A_2 = A_3 - A_4 = \frac{\pi \times R^2}{4} - r^2$.

L'aire de la lunule est égale à $A_1 - A_2$ soit $A_1 - (A_3 - A_4)$ ou encore $A_1 - A_3 + A_4$. Elle est donc égale à $\frac{\pi \times r^2}{2} - \frac{\pi \times R^2}{4} + r^2$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AOC , dont l'hypoténuse mesure R et les côtés de l'angle droit r permet d'affirmer que $R^2 = 2 \times r^2$

$$\frac{\pi \times r^2}{2} - \frac{\pi \times R^2}{4} + r^2 = \frac{\pi \times r^2}{2} - \frac{\pi \times 2 \times r^2}{4} + r^2 = \frac{\pi \times r^2}{2} - \frac{\pi \times r^2}{2} + r^2 = r^2$$

L'aire de la lunule est égale à r^2 .

Remarque :

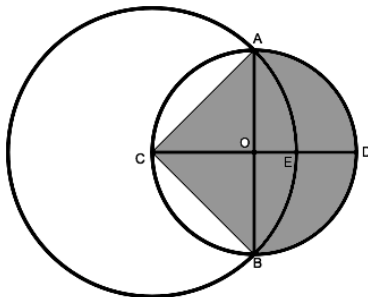
Une des nombreuses difficultés de cet exercice est la suppression de parenthèses :

$$A_1 - (A_3 - A_4) = A_1 - A_3 + A_4.$$

Effectuons une nouvelle transformation, plus facile, de cette expression :

$$A_1 - (A_3 - A_4) = A_1 - A_3 + A_4 = A_1 + A_4 - A_3$$

La dernière écriture nous indique qu'une autre façon d'obtenir la lunule consiste dans une première étape à ajouter le triangle ABC au demi-disque de rayon r pour obtenir cette surface :

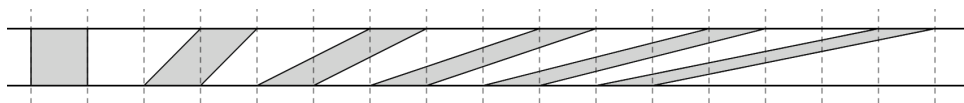


Il reste alors à enlever le quart de disque de rayon R .

Cette procédure est plus difficile à envisager, mais conduit à un calcul plus simple puisque la question des parenthèses ne se pose plus.

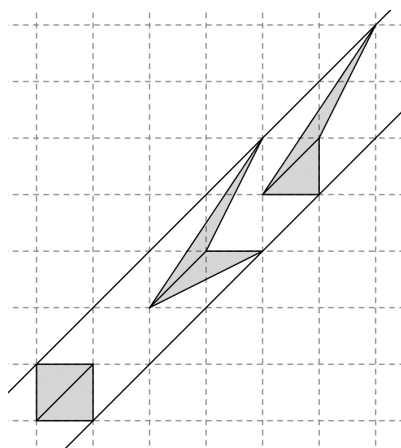
Exercice 12

On peut transformer un carreau du quadrillage, considéré comme un parallélogramme, en appliquant la remarque du cours : si l'on déforme ce parallélogramme sans changer ni sa base ni sa hauteur, son aire ne change pas. Cette façon de procéder permet d'obtenir de nombreux parallélogrammes de même aire. En voici quelques-uns.



On peut également considérer un carreau du quadrillage partagé en deux triangles par une de ses diagonales et appliquer la même remarque à ces triangles, ou à l'un d'entre eux seulement.

Cette façon de procéder permet d'obtenir les quadrilatères suivants (et beaucoup d'autres).



Exercice 13

Augmenter de 25%, c'est multiplier par 1,25.

La longueur de la photographie est multipliée par 1,25, le nombre 1,25 est donc le coefficient de l'agrandissement.

L'aire de la photographie est multipliée par le carré du coefficient, l'aire de la photographie agrandie est donc égale à $160 \times 1,25^2$ soit à 250.

Remarque :

Si vous travaillez sans calculatrice (nous nous permettons de rappeler que c'est une excellente idée), il serait beaucoup plus pratique de remplacer l'écriture 1,25 par $\frac{5}{4}$.

Le fait de savoir par cœur que $0,25 = 1/4$ peut vous alerter et faire penser à ce remplacement.

Le calcul de l'aire agrandie se ramène alors à $160 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{16 \times 10 \times 25}{16} = 250 \dots$ tout de même plus rapide que de poser deux multiplications successives par 1,25.

Exercice 14

Soit A l'aire du petit disque. Le grand disque ayant un rayon double, c'est un agrandissement de coefficient 2 du petit disque. Son aire est donc égale à $2^2 \times A$, soit $4A$.

L'aire de la couronne est obtenue en soustrayant l'aire du petit disque de celle du grand disque, elle est donc égale à $4A - A$ soit $3A$.

L'aire de la couronne mesurant 30 centimètres carrés, l'aire A du petit disque mesure 10 centimètres carrés et celle du grand disque mesure 40 centimètres carrés.