Ce qu’il faut retenir, c’est ce qui n’est pas écrit !

$$5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

L'égalité ci-dessus est vraie. Pourquoi est-elle vraie ?

Cette égalité énonce une convention : les mathématiciens ont décidé que 5^6 était une façon de résumer $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

On peut discuter le caractère pratique de cette convention (peut-être une autre écriture aurait été plus commode, plus évocatrice), mais sa vérité n’a pas à être justifiée.

Si toutes les personnes qui font des mathématiques sont d’accord pour convenir que quand on écrit 5^6 cela signifie $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$, ainsi soit-il.

Pour entrer dans la communauté mathématique, avoir une chance de comprendre ce que les autres y écrivent, il faut donc utiliser cette convention comme le font tous les autres membres de la communauté.

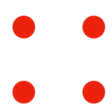
Insistons sur ce point : aucune réflexion personnelle ne permet de retrouver que 5^6 signifie $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

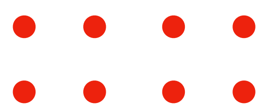
Cette convention, comme toute convention, est arbitraire. C’est pourquoi il n’y a pas d’autre solution que de la mémoriser.

Résumons :

$5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ parce que c’est comme ça.

Les conventions permettent de se comprendre, mais fort heureusement, faire des mathématiques ne se limite pas à appliquer des conventions.

le nombre de points dessinés ici s’écrit « 4 » par convention : 

Le nombre de points dessinés ici s’écrit « 8 » par convention : 

En revanche, il n'y a rien de conventionnel à remarquer qu'en assemblant deux groupes de 4 points, on obtient un groupe de 8 points. Il ne peut pas en être autrement, c'est un fait, une nécessité.

8 c'est la même chose que 4 et encore 4.
C'est un fait qui, par convention, s'écrit 4 + 4 = 8.

On voit que dès les étapes les plus élémentaires la nécessité (ce qui ne peut pas être autrement) et la convention (ce qui est choisi de façon arbitraire) sont liées.

Étudions une affirmation un peu plus compliquée : $3^6 \times 3^4 = 3^{10}$

Selon la convention étudiée plus haut, cette égalité est une autre façon d'écrire ceci :

$(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

Mais la convention ne dit pas si cette égalité est vraie.

Pour être sûr que cette égalité est vraie, il faut faire appel à une connaissance concernant la multiplication : « dans un calcul qui ne comporte que des multiplications, l'ordre dans lequel elles sont effectuées n'a pas d'importance ».

Ces considérations peuvent vous paraitre bien générales, mais elles peuvent vous aider à bien choisir les connaissances à mémoriser, à bien orienter vos efforts.

Dans le domaine du calcul, trois sortes de vérités méritent un effort de mémorisation :

- Les conventions d'écritures (faute de quoi vous ne comprendrez pas les questions qui vous sont posées… sans parler d'y répondre).
  Si vous devez effectuer $17 \times 254{,}7 - 254{,}7 \times 12$ et ne savez pas que ce calcul est le même que $(17 \times 254{,}7) - (254{,}7 \times 12)$, vous risquez d'y voir l'opération 254,7 - 254,7 Elle est facile à effectuer, mais ne fait pas partie du calcul demandé.

- Les faits numériques comme 4 + 4 = 8, $9 \times 7 = 63$ ou $13^2 = 169$.
  Plus vous aurez de faits numériques accessibles immédiatement en mémoire, plus vos ressources mentales seront disponibles pour des tâches de réflexion.

- Des propriétés mathématiques, comme « dans un calcul qui ne comporte **que** des multiplications, l'ordre dans lequel elles sont effectuées n'a pas d'importance ».

En revanche mémoriser les formules qui suit est inutile

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad a^m \times a^n = a^{(m+n)} \qquad (a^b)^c = a^{(b \times c)}$$

Nous ne disons pas que ces formules sont inutiles de façon générales, mais à un niveau élémentaire comme celui du CRPE elles sont remplacées avantageusement par un peu de réflexion personnelle.

Si vous choisissez de les apprendre tout de même, vous aurez très peu d'occasions de les utiliser pour consolider leur place en mémoire, vous courrez donc le risque d'utiliser le moment venu une formule approximative, ressemblant à celle que vous avez cherché à apprendre, mais fausse.

Exemple d'exercice détaillé

$A = 25 \times 7^8 + 24 \times 7^8$. Écrivez A sous forme d'une puissance d'un nombre entier.

Je m'assure que je comprends bien ce qu'est le nombre A, que j'interprète correctement les conventions d'écriture :
A, c'est 25 fois le nombre 7^8 auquel j'ajoute 24 fois le même nombre.

Je reconnais là une situation bien connue :
10 trucs + 9 trucs, c'est 19 trucs,
5 douzaines + 3 douzaines, c'est 8 douzaines,
$20 \times 1000 + 6 \times 1000$, c'est 26×1000

C'est une propriété qu'on résume souvent sous la forme
$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$
Appliquée au nombre A elle permet d'affirmer que $A = 49 \times 7^8$
Cela tombe bien, il n'y a plus de signe + dans l'écriture du nombre A, ce qui est prometteur si on veut l'écrire sous forme d'une puissance d'un nombre entier.

49 est un nombre familier : c'est 7 fois 7, je peux donc écrire que $A = 7 \times 7 \times 7^8$

Si je ne parviens pas à conclure immédiatement, je peux imaginer que le nombre 7^8 dans l'expression A n'est pas écrit sous forme résumée (en utilisant une puissance) mais en détaillant toutes les multiplications.

On aurait alors $A = 7 \times 7 \quad \times \quad 7 \times \ldots \times 7$

A est le produit de 10 nombres, tous égaux à 7, donc $A = 7^{10}$

On reconnait dans les encadrés les trois types de connaissances évoquées plus haut : les conventions, les faits numériques et les propriétés mathématiques.

Bien entendu, le jour du concours il ne vous est pas demandé de détailler votre cheminement mental comme nous l'avons fait ici : la réponse suivante serait totalement suffisante :

$$A = 25 \times 7^8 + 24 \times 7^8$$
$$A = 49 \times 7^8$$
$$A = 7 \times 7 \times 7^8$$
$$A = 7^{10}$$

Pourtant, pour progresser en mathématiques, ce sont les raisonnements des encadrés qu'il faut méditer et qui peuvent resservir.

Autrement dit, **dans le corrigé d'un exercice mathématique le plus important est souvent ce qui n'est pas écrit** : quel raisonnement a permis à l'auteur de passer d'une étape à la suivante ?