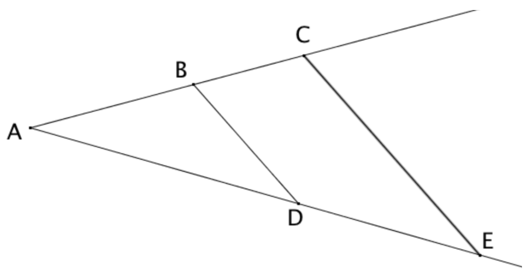
Chapitre 7

Quand la géométrie se ramène au calcul

Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès s'applique aux figures dans lesquelles deux triangles sont formés par deux droites sécantes et deux droites parallèles. Il signifie essentiellement que, dans cette situation, un des triangles est l'agrandissement de l'autre.



Sur la figure ci-dessus, le triangle ACE est un agrandissement du triangle ABD.

La longueur de chaque côté du triangle ACE est obtenue en multipliant la longueur du côté correspondant de ABC par un même nombre k (le coefficient de l'agrandissement) : $AC = k \times AB$; $AE = k \times AD$; $CE = k \times BD$.

Ces égalités peuvent s'écrire ainsi : $\frac{AC}{AB} = k$; $\frac{AE}{AD} = k$; $\frac{CE}{BD} = k$.

L'usage consiste à exprimer cela sans utiliser le nombre k, en écrivant simplement que les trois rapports sont égaux :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$$

En disant que ABD est une réduction de ACE, on obtient les égalités suivantes :

$AB = q \times AC$; $AD = q \times AE$; $BD = q \times CE$, dans lesquelles q est le coefficient de la réduction, c'est-à-dire un nombre positif inférieur à 1.

Les mêmes transformations d'écritures que dans le cas précédent conduisent à :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$

Le théorème de Thalès pourrait s'énoncer ainsi :

Si deux triangles sont formés par deux droites parallèles et deux droites sécantes, alors l'un des deux triangles est un agrandissement de l'autre.

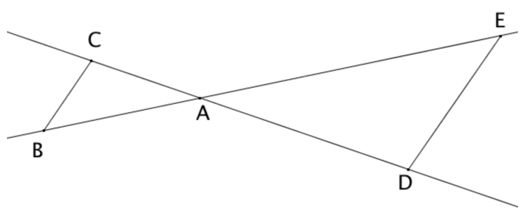
Il est généralement plutôt formulé comme ceci :

Si deux triangles OAB et OCD sont tels que :
- *O, A et B sont alignés,*
- *O, C et D sont alignés,*
- *(AC) est parallèle à (BD),*

alors $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$.

La première forme a l'avantage d'être facile à comprendre et à retenir, mais laisse à l'utilisateur la charge de retrouver les rapports égaux. La deuxième forme a l'avantage de constituer un modèle de rédaction réutilisable tel quel dans les exercices.

Tout ce qui précède reste vrai dans le cas où les deux triangles sont situés de part et d'autre de leur sommet commun comme dans la figure suivante.



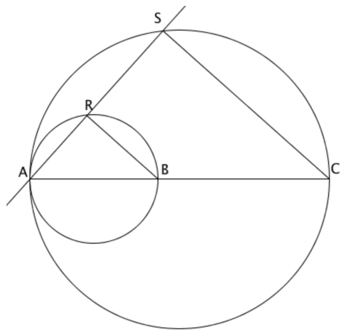
Si les points A, B et E sont alignés, si les points A, C et D le sont également et si les droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors le triangle ADE est un agrandissement de ACB. On obtient alors les égalités suivantes :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ ou bien } \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}\ .$$

Quelques remarques aidant à retenir les rapports qui interviennent dans le théorème de Thalès :
- Les trois numérateurs sont les mesures des trois côtés d'un même triangle, les trois dénominateurs sont les mesures des côtés de l'autre triangle.
- Dans un même rapport apparaissent les mesures de deux côtés situés sur une même droite, ou bien de deux côtés parallèles (cette remarque est utile dans le cas de la configuration “croisée” pour éviter d'écrire un rapport tel que $\frac{AC}{AE}$ qui ne figure pas parmi les rapports égaux donnés par le théorème de Thalès.
- Les longueurs BC et DE de notre première figure, ainsi que les longueurs BE et CD de la seconde figure n'apparaissent pas dans les rapports égaux parce qu'il ne s'agit pas de côtés des triangles (ceci reste vrai même quand on doit calculer précisément une de ces longueurs ne figurant pas dans les rapports issus du théorème).

Exemple d'exercice

On considère un segment [AC] de 14 cm et un point B situé sur ce segment, tel que AB = 6 cm.
On trace le cercle de diamètre [AB] et le cercle de diamètre [AC].
R est un point du cercle de diamètre [AB] tel que AR = 4 cm.
La droite (AR) coupe le cercle de diamètre [AC] en A et en un autre point que l'on nomme S.
Calculer la longueur du segment [RS].



Solution rédigée

R est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ARB est rectangle en B, ce qui revient à dire que (RB) est perpendiculaire à (AS).

- S est sur le cercle de diamètre [AC] donc le triangle ASC est rectangle en C, ce qui revient à dire que (SC) est perpendiculaire à (AS).
- Les droites (RB) et (SC) sont perpendiculaires à (AS), elles sont donc parallèles entre elles.
- La figure constituée des triangles ARB et ASC a les propriétés suivantes :
  - Les points A, R et S sont alignés.
  - Les points A, B et C sont alignés.
  - Les droites (RB) et (SC) sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès à cette figure, il en résulte que $\frac{AR}{AS} = \frac{AB}{AC}$.

- En remplaçant les longueurs connues par leur mesure, on obtient $\frac{4}{AS} = \frac{6}{14}$.

On en déduit que $6 \times AS = 4 \times 14$ d'où $AS = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$.

- Comme R est sur le segment [AS], $RS = AS - AR = \frac{28}{3} - 4 = \frac{28}{3} - \frac{12}{3} = \frac{16}{3}$.
- La longueur du segment [RS] est $\frac{16}{3}cm$.

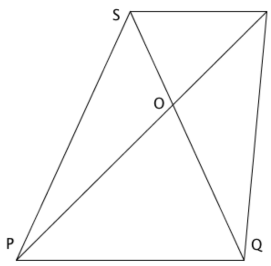
Remarques à propos de cet exercice :

- *Il n'est pas nécessaire de mentionner l'ordre des points alignés (nous verrons pourquoi c'est lors de l'utilisation de la réciproque du théorème de Thalès que cette mention est généralement jugée nécessaire, et comment l'éviter).*
- *Quand on peut prévoir que l'un des trois rapports égaux ne servira pas, autant ne pas l'écrire.*
- *Nous avons utilisé la propriété suivante : « quand deux fractions sont égales, les produits en croix sont égaux ». Malgré toutes les réserves que nous exprimons par ailleurs sur l'usage du « produit en croix », cette version nous parait légitime : pour l'utiliser, il faut s'assurer auparavant qu'on est en présence de deux fractions égales, ce qui évite les dérives les plus fréquentes. Il est cependant possible de raisonner autrement :*

  - *en réduisant les fractions au même dénominateur :* $\frac{4}{AS} = \frac{6}{14}$ *donc* $\frac{4\times 14}{AS\times 14} = \frac{6\times AS}{14\times AS}$ *donc* $4 \times 14 = 6 \times AS$*.*
  - *en pensant que quand deux fractions sont égales les fractions inverses sont égales :* $\frac{4}{AS} = \frac{6}{14}$ *donc* $\frac{AS}{4} = \frac{14}{6}$ *donc* $AS = 4 \times \frac{14}{6}$*.*
- *La valeur trouvée n'est pas décimale, la remplacer par 5,3 cm conduirait à une réponse approximative, ce n'est pas ce qui est attendu.*
- *En revanche, même si on n'en fait pas état sur la copie, la valeur approchée 5,3 cm permet de vérifier facilement, en mesurant sur la figure, que la longueur calculée est raisonnable.*

Deuxième exemple d'exercice

PQRS est un trapèze dont les bases sont [PQ] et [RS] et qui possède les dimensions suivantes :
PQ = 5 cm ; PS = SQ = 6 cm ; SR = 3 cm.
On appelle O l'intersection de ses diagonales. Calculer la longueur OS.



Solution rédigée

- La figure constituée des triangles SOR et QOP a les propriétés suivantes :
  - Les points S, O et Q sont alignés.
  - Les points R, O et P sont alignés.
  - Les droites (SR) et (PQ) sont parallèles.

  On peut donc appliquer le théorème de Thalès à cette figure, il en résulte que $\frac{OS}{OQ} = \frac{SR}{PQ}$.
- Comme O est sur le segment [SQ], on a OQ = SQ - OS = 6 - OS.
- L'égalité $\frac{OS}{OQ} = \frac{SR}{PQ}$ peut alors s'écrire $\frac{OS}{6-OS} = \frac{3}{5}$.
  On en tire successivement les égalités suivantes :

5OS = 3 (6-OS) ; 5OS = 18 - 3OS ; 8OS = 18 ; OS = $\frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

Le segment OS mesure $\frac{9}{4}cm$ soit $2,25cm$.
Remarques à propos de cet exercice :

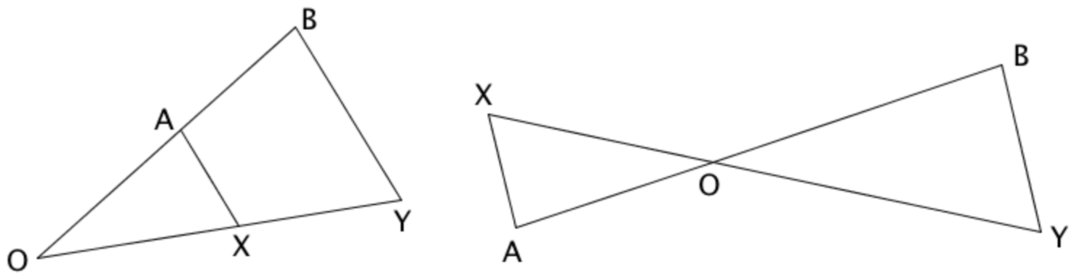
- *[SQ] n'est pas un côté de l'un des deux triangles utilisés, c'est pourquoi on ne retrouve pas SQ dans les égalités fournies par le théorème de Thalès. C'est ce qui conduit à effectuer le remplacement de OQ par SQ - OS. Ce changement d'écriture permet à la fois de n'avoir qu'une longueur inconnue : OS et d'introduire dans l'égalité la longueur SQ, qui est connue.*

— *Le remplacement dans la conclusion de l'écriture fractionnaire* $\frac{9}{4}cm$ *par l'écriture décimale* $2,25cm$ *n'est pas indispensable, mais il est correct puisque 2,25 est égal à* $\frac{9}{4}$*, il ne s'agit pas d'une valeur approchée.*

Réciproque du théorème de Thalès

On désigne sous ce nom, par abus de langage, une propriété qui n'est pas réellement la réciproque du théorème de Thalès.

En effet, la réciproque d'une propriété est obtenue en intervertissant les conditions d'utilisation de la propriété et sa conclusion.
Par exemple, les propriétés suivantes sont réciproques l'une de l'autre : « Si un nombre entier est multiple de 5, alors il se termine par 0 ou 5 » et « Si un nombre entier se termine par 0 ou 5, alors il est multiple de 5 ».
La « réciproque du théorème de Thalès » n'est pas obtenue à partir du théorème direct par une inversion aussi simple.
Nous continuerons cependant à parler de « réciproque du théorème de Thalès ».



Voici un énoncé de la réciproque du théorème deThalès, il s'applique aux deux configurations ci-dessus :

Si deux triangles OAX et OBY sont tels que :
O, A et B sont alignés ; O, X et Y sont alignés dans le même ordre que O, A et B ;
$\frac{OA}{OB} = \frac{OX}{OY}$ *;*
alors les droites (AX) et (BY) sont parallèles.

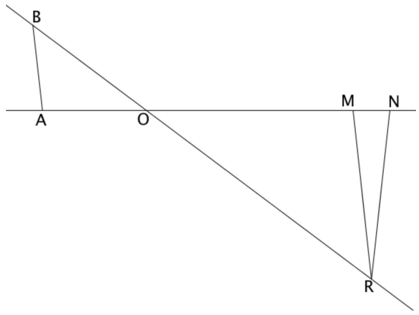
Voici une autre rédaction de la même propriété :

Si deux triangles OAX et OBY sont en situation de Thalès et tels que :
O, A et B sont alignés ; O, X et Y sont alignés ;
$\frac{OA}{OB} = \frac{OX}{OY}$ *;*
alors les droites (AX) et (BY) sont parallèles.

Nous admettrons cette propriété.

Expliquons cependant deux caractéristiques souvent perçues comme difficiles.

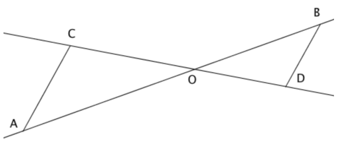
— Pourquoi la propriété n'utilise-t-elle pas les longueurs des côtés dont on veut prouver le parallélisme ?

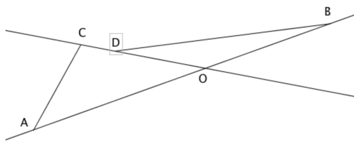


Sur la figure ci-dessus, les longueurs RM et RN sont égales.

Supposons qu'on ait montré que $\frac{OB}{OR} = \frac{AB}{MR}$. Comme MR = NR, on aurait également $\frac{OB}{OR} = \frac{AB}{NR}$. Or il est impossible que les droites (MR) et (NR) soient toutes deux parallèles à (AB), les égalités de rapport indiquées ci-dessus ne permettent donc pas de conclure au parallélisme.

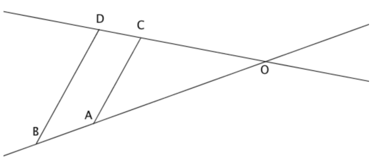
— Pourquoi faut-il mentionner l'ordre de l'allignement ?

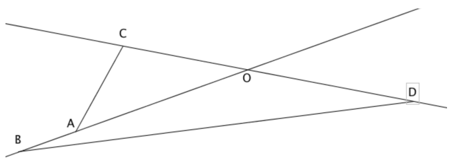




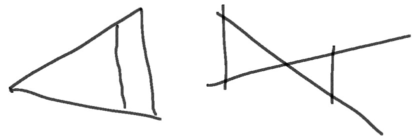
Considérons maintenant les deux figures ci-dessus. Seule la position du point D a changé d'une figure à l'autre : Si l'égalité $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ est vraie pour une figure elle est également vraie pour l'autre puisqu'aucune des longueurs entrant dans les calculs n'a changé. Pourtant, les droites (AC) et (BD) ne sont parallèles que sur la figure de gauche. C'est pour exclure le cas de la figure de droite qu'on mentionne généralement l'alignement « dans le même ordre ».

On peut faire les mêmes observations avec les deux figures ci-dessous.





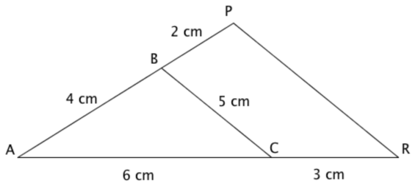
La mention de l'ordre des points alignés conduit à une rédaction lourde et souvent mal utilisée, c'est pourquoi la deuxième formulation proposée plus haut est généralement acceptée au collège (et donc en principe au concours de professeurs des écoles). On considère dans cette approche que la réciproque du théorème de Thalès ne peut s'appliquer que dans les configurations suivantes, qu'on appelle alors « configurations de Thalès » :



Le fait de mentionner que deux triangles « sont en situation de Thalès » suffit alors à imposer un ordre correct des points alignés, sans avoir à l'expliciter.

Exemple d'exercice

Sur la figure ci-dessous les points A, B et P sont alignés. Les points A, C et R le sont également, et les longueurs de certains segments sont indiquées.
Calculer la longueur PR



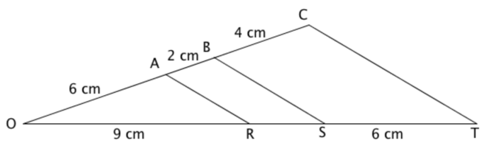
Solution rédigée

En utilisant les mesures indiquées sur la figure, on obtient : $\frac{AP}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $\frac{AR}{AC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
Les triangles ABC et APR forment une configuration de Thalès dans laquelle :
- A, B et P sont alignés,
- A, C et R sont alignés,
- $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AC}$

Les droites (PR) et (BC) sont donc parallèles.
On peut alors appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et APR, on en déduit que $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AC} = \frac{PR}{BC}$.
Il en résulte que $\frac{PR}{BC} = \frac{3}{2}$, donc que $\frac{PR}{5} = \frac{3}{2}$ et que $PR = \frac{15}{2}$.
Le segment [PR] mesure 7,5 cm.

Deuxième exemple d'exercice

Dans la figure ci-dessous, les points A et B sont sur [OC], les points R et S sont sur [OT]. Les droites (AR) et (BS) sont parallèles, et les longueurs de certains segments sont indiquées.
Démontrer que les droites (BS) et (CT) sont parallèles.



Solution rédigée

Dans la figure constituée des triangles OAR et OBS, les points O, A et B sont alignés, les points O, R et S sont alignés, et les droites (AR) et (BS) sont parallèles. Le théorème de Thalès permet alors d'affirmer que $\frac{OB}{OA} = \frac{OS}{OR}$. En utilisant les mesures de longueur données, on obtient $\frac{8}{6} = \frac{OS}{9}$, d'où $OS = 9 \times \frac{8}{6} = 12$.

En utilisant les mesures indiquées sur la figure et celle que l'on vient de calculer, on obtient : $\frac{OC}{OB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $\frac{OT}{OS} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Les triangles OBS et OCT forment une configuration de Thalès dans laquelle :

— O, B et C sont alignés,

— O, S et T sont alignés,

— $\frac{OC}{OB} = \frac{OT}{OS}$

Les droites (CT) et (BS) sont donc parallèles.

Remarque : Il était également possible de prouver le parallélisme de (CT) et (BS) sans utiliser la réciproque du théorème de Thalès en utilisant, après avoir calculé OS, le fait que A et R sont les milieux respectifs de [OC] et [OT]. Dans le triangle OCT, la droite (AR), qui passe par les milieux des côtés [OC] et [OT], est parallèle au côté (CT). On sait alors que les droites (CT) et (BS) sont parallèles à la droite (AR) et on en déduit qu'elles sont parallèles entre elles.

Propriété de Pythagore

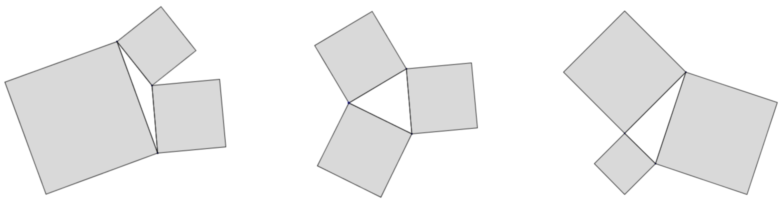
Sur chacune des illustrations ci-dessous figurent un triangle et trois carrés. Chaque carré est construit en prenant pour côté l'un des côtés du triangle.

Si on s'intéresse aux aires des carrés, on observe trois cas différents :

— Sur la figure de gauche, l'aire du grand carré est manifestement supérieure à la somme des aires des deux petits carrés.

— Sur la figure centrale, les trois carrés ayant des dimensions très proches, l'aire du plus grand est inférieure à la somme des aires des deux petits.

— Sur la figure de droite, on ne peut pas conclure immédiatement, l'aire du grand carré semble voisine de la somme des aires des deux petits.



La propriété de Pythagore affirme que dans cette situation, l'égalité entre l'aire du plus grand carré et la somme des aires des deux autres carrés caractérise les triangles rectangles. On peut l'énoncer comme ceci :

Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

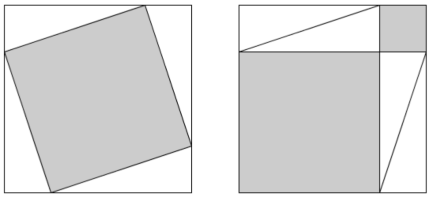
— *Un triangle est rectangle.*

— *Le carré du grand côté du triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Dire que deux affirmations sont équivalentes signifie que quand l'une est vraie l'autre l'est également, quand l'une est fausse, l'autre aussi. Cette façon d'énoncer la propriété de Pythagore, conforme aux programmes actuels du collège, évite d'avoir à distinguer le théorème lui-même de sa réciproque, ou encore de sa forme contraposée. On évoquera dans tous les cas la « propriété de Pythagore ».

Sans rédiger de façon détaillée une démonstration de la propriété de Pythagore, on peut en donner une idée à l'aide des deux figures qui suivent.

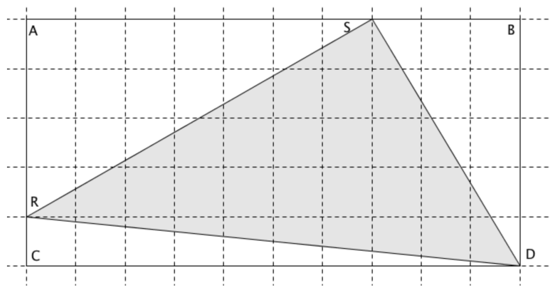
Dans les deux cas, la partie grise est obtenue en enlevant d'un même grand carré quatre triangles rectangles identiques. Les aires des parties grisées des deux figures sont donc égales. Or la partie grisée de la figure de gauche est le carré de l'hypoténuse de l'un des petits triangles rectangles, la partie grisée de la figure de droite est constituée des carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle identique.



Exemple d'exercice

La figure ci-dessous a été tracée sur un quadrillage régulier dont les points A, B, C, D, R et S sont des nœuds.

Le triangle RSD est-il rectangle ?



Solution rédigée

Utilisons comme unité de longueur le côté d'un petit carreau du quadrillage.

Le triangle ARS est rectangle en A, la propriété de Pythagore permet donc d'affirmer que $RS^2 = AR^2 + AS^2$.
Il en résulte que $RS^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$.

On démontre de la même façon, en utilisant successivement les triangles rectangles BDS et CRD que $SD^2 = 34$ et que $DR^2 = 101$.

Dans le triangle RDS on a donc :
- $DR^2 = 101$,
- $RS^2 + SD^2 = 65 + 34 = 99$.

On constate que $DR^2 \neq RS^2 + SD^2$, le triangle RSD n'est donc pas rectangle (bien que l'observation de la figure puisse le faire penser).

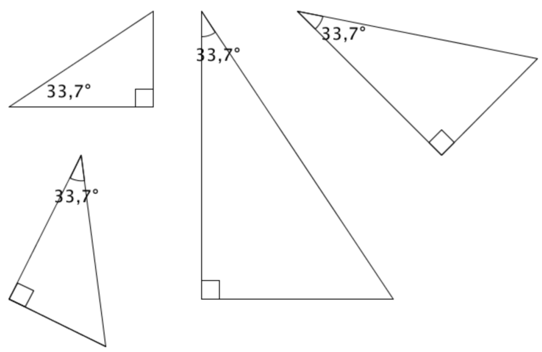
Remarque : Il serait plus que maladroit de commencer par écrire « $DR^2 = RS^2 + SD^2$ » alors qu'on ne sait pas au début de l'exercice si cette égalité est vraie ou fausse. Il est beaucoup plus clair de commencer comme nous l'avons fait par calculer un carré d'une part, la somme des deux autres carrés de l'autre, et de rédiger ensuite la conclusion selon les résultats trouvés.

Trigonométrie

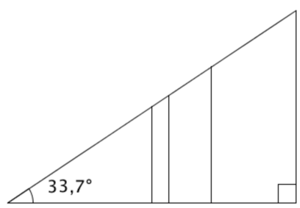
La trigonométrie est généralement moins présente que les théorèmes de Pythagore et de Thalès dans l'épreuve de mathématique du concours . Si vous n'avez pas la possibilité de travailler tous les sujets, celui-ci est donc un de ceux que vous pouvez négliger sans trop de risques.

Lien avec le théorème de Thalès

Comme pour le Théorème de Thalès, l'idée de base est que certains triangles sont des agrandissements les uns des autres. En ce qui concerne la trigonométrie, on s'appuie sur l'idée que si deux triangles rectangles ont un angle aigu égal, alors ils ont la même forme, c'est à dire que l'un des deux est un agrandissment de l'autre. Nous admettrons ici que cette affirmation est vraie.



Tous les triangles de la figure précédente sont donc des agrandissements (ou des réductions) les uns des autres. Le lien avec le théorème de Thalès est mis en évidence si on dispose les mêmes triangles ainsi :



Deux points de vue différents sur l'agrandissement.

L'agrandissement se traduit par deux types d'égalités de rapports :

— Chaque côté de la grande figure est obtenu en multipliant le côté correspondant de la petite figure par le même nombre. Si ce nombre (le coefficient de l'agrandissement) vaut 4, tous les rapports $\frac{côté\,de\,la\,grande\,figure}{côté\,de\,la\,petite\,figure}$ valent 4. C'est ce principe qu'utilise le théorème de Thalès.

— Si un côté de la petite figure vaut 3 fois un autre côté de la petite figure, alors sur la grande figure, un côté vaudra également 3 fois l'autre. Le rapport $\frac{grand\,côté}{petit\,côté}$ vaut 3 pour chacune des figures. C'est ce principe qu'utilise la trigonométrie.

Cette différence de point de vue entraine que le théorème de Thalès ne parle que de deux triangles à la fois (mais de tous leurs côtés) alors que la trigonométrie ne parle que de deux côtés de chaque triangle (mais d'autant de triangles qu'on le veut).

	hypoténuse	petit côté de l'angle droit	grand côté de l'angle droit
triangle A	10	6	8
triangle B	15	9	12
triangle C	35	21	28

Le tableau ci-dessus donne les mesures de trois triangles rectangles, tous trois obtenus en agrandissant le triangle donc les mesures sont 3, 4 et 5. Ces trois triangles sont donc bien des agrandissements ou des réductions les uns des autres.

Si on dispose deux de ces triangles en situation de Thalès, on obtient les égalités suivantes :

— $\frac{10}{15} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ si on utilise les triangles A et B,

— $\frac{10}{35} = \frac{6}{21} = \frac{8}{28}$ si on utilise les triangles A et C.

Il est bien sûr possible d'utiliser aussi les triangles B et C.

La trigonométrie rend compte des égalités suivantes :

— $\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{28}{21}$: dans ces triangles, le grand côté de l'angle droit vaut toujours « autant de fois » le petit côté de l'angle droit.

  Le rapport $\frac{grand\,côté\,de\,l'angle\,droit}{petit\,côté\,de\,l'angle\,droit}$ est le même dans les trois triangles.

— $\frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{21}{35}$: dans ces triangles le petit côté de l'angle droit vaut toujours « autant de fois » l'hypoténuse.

  Le rapport $\frac{petit\,côté\,de\,l'angle\,droit}{hypoténuse}$ est le même dans les trois triangles.

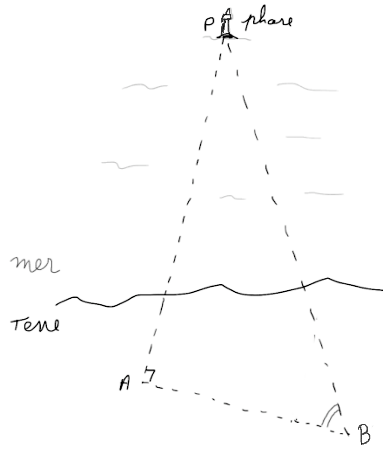
On peut bien sûr trouver des égalités du même type à partir du grand côté de l'angle droit et de l'hypoténuse.

Les rapports utilisés par la trigonométrie, rapports internes à une figure, sont ceux qu'on utilise quand on parle d'un écran 4/3 ou 16/9. Il s'agit d'écrans dont le rapport longueur/largeur vaut 4/3 ou 16/9, ce qui traduit le fait que tous les écrans 4/3 ont la même forme, tous les écrans 16/9 ont la même forme.

Exemple d'utilisation

La trigonométrie sert en particulier à établir des cartes, parce qu'il est souvent plus facile de mesurer des angles que des distances.

Supposons par exemple que l'on veuille trouver la distance d'un point A situé à terre à un phare situé sur un rocher en mer.



Plaçons un point B sur la terre ferme, de façon à ce que le triangle PAB soit rectangle, mesurons l'angle $\widehat{ABP}$ (ce qui est possible par des visées, sans quitter le point B), et la longueur AB. Nous supposerons dans la suite de cet exemple que AB = 1700 m et $\widehat{ABP}$=59°.

Nous pouvons maintenant déterminer la longueur AP en traçant un triangle A'B'P' rectangle en A' dont l'angle $\widehat{A'B'P'}$ mesure 59°. Si nous choisissons pour longueur de A'B' 10 cm, P'A' mesure environ 16,6 cm. Le rapport $\frac{P'A'}{A'B'}$ est donc proche de $\frac{16{,}6}{10}$ soit 1,66.

Remarque : ce rapport étant le même dans tous les triangles rectangles ayant un angle de 59°, nous obtiendrions le même résultat en choisissant une longueur différente de 10 cm pour A'B', mais le choix de la valeur 10 facilite le calcul.

Il ne nous reste plus qu'à utiliser ce rapport pour calculer PA.

Le rapport $\frac{grand\,côté\,de\,l'angle\,droit}{petit\,côté\,de\,l'angle\,droit}$ est le même dans la figure sur le terrain et dans la figure réduite sur papier, il en résulte que $\frac{PA}{AB}\approx$1,66. Donc, $PA \approx 1,66 \times AB$; $PA \approx 1,66 \times 1700m$; $PA \approx\ 2822\,m.$

Limites de cette méthode et améliorations.

La méthode précédente suppose un tracé annexe et des mesures sur cette figure ce qui prend du temps et entraine des imprécisions qui s'ajoutent aux imprécisions des mesures effectuées sur le terrain.

Pour faciliter le travail et améliorer la précision, les mathématiciens ont dressé des « tables de trigonométrie ». La valeur des différents rapports de côtés dans les triangles rectangles a été calculée avec une grande précision à l'aide de méthodes que nous ne pouvons pas décrire ici. Ces résultats ont été consignés dans des ouvrages pour chaque mesure d'angle, de degré en degré et pour de nombreuses valeurs intermédiaires. Ces tables permettaient de savoir que le rapport d'environ 1,66 que nous avons déterminé par la mesure est en réalité proche de 1,664279482.

— 153 —

13 DEGRÉS

′	Sin.	D	Tang.	D.C	Cotg.	Cos.	D	′
0	$\bar{1}$,3 5209	54	$\bar{1}$,3 6336	58	0,6 3664	$\bar{1}$,9 8872	3	60
1	5263	55	6394	58	3606	8869	2	59
2	5318	55	6452	57	3548	8867	3	58
3	5373	54	6509	57	3491	8864	3	57
4	5427	54	6566	58	3434	8861	3	56
5	$\bar{1}$,3 5481	55	$\bar{1}$,3 6624	57	0,6 3376	$\bar{1}$,9 8858	3	55
6	5536	54	6681	57	3319	8855	3	54
7	5590	54	6738	57	3262	8852	3	53
8	5644	54	6795	57	3205	8849	3	52
9	5698	54	6852	57	3148	8846	3	51
10	$\bar{1}$,3 5752	54	$\bar{1}$,3 6909	57	0,6 3091	$\bar{1}$,9 8843	3	50
11	5806	54	6966	57	3034	8840	3	49
12	5860	54	7023	57	2977	8837	3	48
13	5914	54	7080	57	2920	8834	3	47
14	5968	54	7137	56	2863	8831	3	46
15	$\bar{1}$,3 6022	53	$\bar{1}$,3 7193	57	0,6 2807	$\bar{1}$,9 8828	3	45
16	6075	54	7250	56	2750	8825	3	44
17	6129	53	7306	57	2694	8822	3	43
18	6182	54	7363	56	2637	8819	3	42
19	6236	53	7419	57	2581	8816	3	41
20	$\bar{1}$,3 6289	53	$\bar{1}$,3 7476	56	0,6 2524	$\bar{1}$,9 8813	3	40
21	6342	53	7532	56	2468	8810	3	39

	58	57
6	5,8	5,7
7	6,8	6,7
8	7,7	7,6
9	8,7	8,6
10	9,7	9,5
20	19,3	19,0
30	29,0	28,5
40	38,7	38,0
50	48,3	47,5

	56	55
6	5,6	5,5
7	6,5	6,4
8	7,5	7,3
9	8,4	8,3
10	9,3	9,2
20	18,7	18,3
30	28,0	27,5
40	37,3	36,7
50	46,7	45,8

54 53

Aujourd'hui, ces tables sont remplacées par les calculatrices scientifiques.

Pour obtenir une valeur précise du rapport $\frac{AP}{AB}$ dans notre triangle ayant un angle de 59°, il suffit de taper sur une calculatrice scientifique les touches [tan] [5] [9] [EXE] pour obtenir la valeur 1,664279482.

Pour utiliser efficacement la trigonométrie, il ne nous reste plus qu'à savoir à quel rapport correspond chacun des termes sinus, cosinus et tangente (souvent abrégés en sin, cos et tan, notamment sur les claviers des calculatrices).

Les définitions suivantes sont à mémoriser. Si $\widehat{A}$ est un angle aigu d'un triangle rectangle, on a :

$$sinus\,\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à }\hat{A}}{\text{hypoténuse}} \;;\; cosinus\,\widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent à }\hat{A}}{\text{hypoténuse}} \;;\; tangente\,\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à }\hat{A}}{\text{côté adjacent à }\hat{A}}$$

Remarques :

— *Dans un triangle, un angle a deux côtés adjacents (ce sont les côtés de l'angle). Les côtés adjacents d'un angle aigu d'un triangle rectangle sont d'une part un des côtés de l'angle droit, d'autre part l'hypoténuse. Dans les définitions du cosinus et de la tangente, l'expression « côté adjacent » signifie en réalité « côté adjacent autre que l'hypoténuse ».*

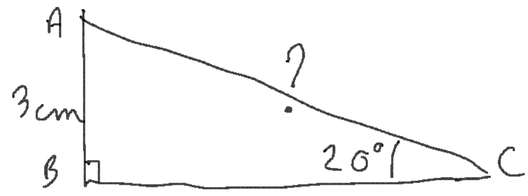
— *Un triangle isocèle rectangle a des angles de 45°. Il en résulte que tan 45°=1 (puisqu'on calcule le rapport de deux côtés égaux). Ceci est très utile pour vérifier que l'unité d'angle utilisée par votre calculatrice est bien le degré, seule unité utilisée au collège et donc au concours. Entrez donc [tan] [4] [5] [EXE] sur votre machine. Si vous n'obtenez pas 1, consultez le mode d'emploi pour savoir comment imposer à votre calculatrice l'utilisation du degré.*

Les deux utilisations de base de la trigonométrie sont le calcul de la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, et le calcul de la mesure d'un de ses angles aigus.

Exemple de calcul d'un côté

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 cm et $\widehat{ACB} = 20°$.
Calculer la longueur AC.

La première chose à faire est un dessin à main levée.



Dans le calcul à effectuer, il sera nécessairement question de AB, seule longueur connue, et de AC, la longueur que l'on cherche.

[AB] étant le côté opposé à l'angle connu $\widehat{ACB}$ et [AC] étant l'hypoténuse du triangle, on devra donc se servir du rapport qui utilise « côté opposé » et « hypoténuse », c'est-à-dire le sinus.

Comme les données imposent le rapport à utiliser, il est indispensable de mémoriser les trois.

solution rédigée

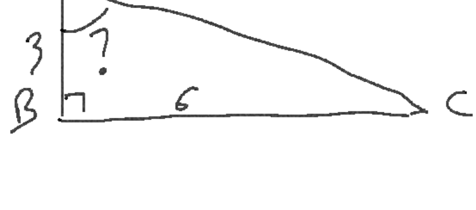
Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :
$sin\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{AB}{AC}$. soit $sin20° = \frac{3}{AC}$.
On en déduit que $AC \times sin20° = 3$ puis que
$AC = \frac{3}{sin20°} \approx 8,8cm$.

Remarques :

— *Si les étapes de calcul vous posent problème, consultez la partie « résoudre une équation » page 231.*
— *Dans la conclusion, il est important de distinguer la valeur exacte, $AC = \frac{3}{sin20°}$, de la valeur approchée 8,8 cm. La première est d'un aspect peu engageant, mais permet d'obtenir autant de précision qu'on le veut, la seconde est beaucoup plus lisible, mais imprécise. Cette distinction se traduit par l'emploi de « = » puis de « ≈ ».*
— *Un dessin plus précis réalisé à l'aide d'un rapporteur permet de vérifier la valeur calculée : il suffit de mesurer AC sur le dessin.*

Exemple de calcul d'un angle

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 cm et BC = 6 cm.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
Commençons à nouveau par une figure à main levée.



Le calcul à effectuer utilisera nécessairement les deux longueurs connues, AB et BC.

[AB] étant le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ que l'on cherche, et [BC] étant son côté opposé, on devra donc utiliser le rapport qui utilise « côté opposé » et « côté adjacent », c'est-à-dire la tangente.

solution rédigée

Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :
$tan\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AB}$ soit $tan\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{6}{3} = 2$

On en déduit que $\widehat{BAC} = tan^{-1}(2) \approx 63°$.

Remarques :

— *Comme pour l'exercice précédent, on n'a pas le choix du rapport de trigonométrie à utiliser.*
— *La notation « $tan^{-1}(2)$ » signifie « la mesure d'angle dont la tangente est égale à 2 ».*
— *Les différentes marques de calculatrices n'utilisent pas les mêmes combinaisons de touches pour retrouver un angle à partir de sa tangente, son sinus ou son cosinus ; consultez le mode d'emploi de votre calculatrice.*

Exercices

Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 8 cm et BC = 10 cm. On appelle H le pied de la hauteur issue de A. Calculer la longueur HC.

Exercice 2

On considère un triangle ABC. Le point E est situé sur [AB], le point F est sur [AC].

On donne les longueurs suivantes : AE = 12 cm, BE = 4 cm, AF = 15 cm, FC = 5 cm, EF = 9 cm.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice 3

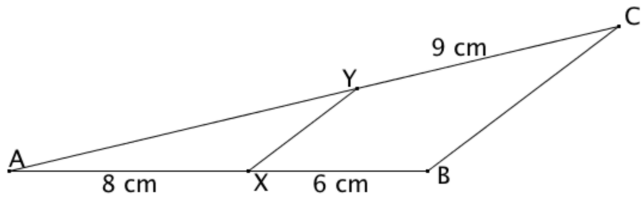
ABC est un triangle tel que AB = 10 cm, $\widehat{BAC} = 19°$ et $\widehat{ABC} = 71°$.

Calculer la longueur BC.

Exercice 4

Sur la figure fournie, A, Y et C sont alignés, A, X et B le sont également. Les droites (XY) et (BC) sont parallèles.

Calculer AC.



Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A.
BH = 10 cm ; CH = 4 cm.
Calculer AH.

Exercice 6

On considère un segment [AC] long de 12 cm, et un point B situé sur ce segment, à 4 cm de A.

Tracer le cercle de diamètre [BC]. Y est un point de ce cercle situé à 6 cm de C.

Tracer le cercle de diamètre [AC]. La droite (CY) coupe ce cercle en C et en un autre point que l'on nommera X.

Calculer la longueur CX.

Exercice 7

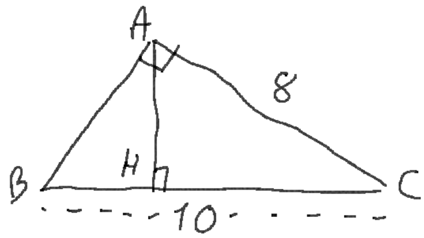
ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 24°$, $\widehat{ABC} = 64°$ et AC = 5 cm. Calculer la longueur BC. On en donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au centième de cm.

Exercice 8

ABC est un triangle tel que AB = AC = 5 cm et BC = 4 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Indications sur les exercices

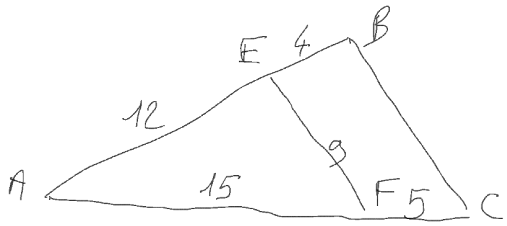
Exercice 1



— Il existe de nombreux cheminements pour résoudre cet exercice. Certains supposent de calculer AH, mais ce n'est pas indispensable.

— Parmi les façons de calculer AH, la plus classique consiste à écrire deux façons différentes de calculer l'aire de ABC. Ces deux méthodes de calcul donnent nécessairement le même résultat, écrire l'égalité entre les deux expressions trouvées fournit une équation qui permet de calculer AH.
— Cependant, la trigonométrie utilisée dans plusieurs triangles rectangles permet d'obtenir une solution beaucoup plus rapide.

Exercice 2



Deux approches peuvent être envisagées :
— démontrer que AEF est rectangle, puis que (BC) est parallèle à (EF) et conclure,
— Commencer par démontrer que (BC) est parallèle à (EF), en déduire la longueur BC et conclure.

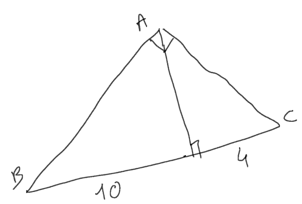
Exercice 3

Si vous envisagez d'utiliser la trigonométrie, il faut commencer par prouver que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 4

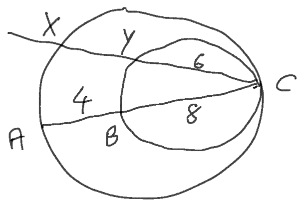
— La longueur CY ne figure dans aucun des rapports égaux découlant du théorème de Thalès.
— Pour introduire tout de même CY dans les calculs il faut, après avoir écrit les égalités issues du théorème de Thalès, se servir de la relation qui existe entre les longueurs AC, AY et CY.

Exercice 5



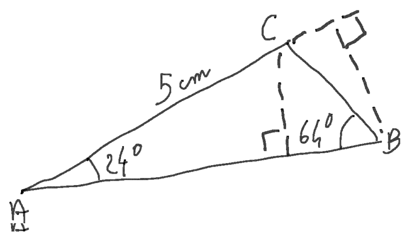
— Dans cette figure, il y a trois triangles rectangles. On peut écrire les trois égalités issues de la propriété de Pythagore et les combiner.
— Une autre méthode consiste à utiliser une propriété géométrique du triangle rectangle. Si vous avez construit une figure précise, vous avez eu besoin de cette propriété pour construire le point A.

Exercice 6



Il n'y a que deux segments à tracer pour faire apparaître une figure de Thalès. Cependant, il n'est pas question de droites parallèles dans l'énoncé, il faudra donc prouver qu'elles le sont.

Exercice 7



Le triangle ABC n'est pas rectangle, on ne peut donc pas utiliser la trigonométrie dans ce triangle... il faut donc prendre l'initiative d'introduire un triangle rectangle dans la figure, par exemple en traçant une des hauteurs de ABC que nous avons fait figurer sur notre dessin à main levée.

Exercice 8

Le triangle ABC n'est pas rectangle, on ne peut donc pas utiliser la trigonométrie directement dans ce triangle... mais ABC est isocèle.

Solutions des exercices

Exercice 1

Première version :
Dans le triangle ABC, rectangle en A, $cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10}$.
Dans le triangle AHC, rectangle en H, $cos\widehat{C} = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{8}$.
Or, l'angle de sommet C est le même dans ces deux triangles, on a donc $\frac{HC}{8} = \frac{8}{10}$, donc
$HC = 8 \times \frac{8}{10} = \frac{64}{10}$
La longueur HC mesure donc 6,4 cm.

Deuxième version :

Le triangle ABC est rectangle en A, le théorème de Pythagore permet donc d'affirmer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'où $100 = AB^2 + 64$; $AB^2 = 36$; $AB = 6$.

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AB \times AC)$ mais aussi à $\frac{1}{2}(AH \times BC)$.

On obtient donc : $\frac{1}{2}(AB \times AC) = \frac{1}{2}(AH \times BC)$; $(AB \times AC) = (AH \times BC)$;

$(6 \times 8) = (AH \times 10)$; $AH = \frac{6\times8}{10} = 4,8$.

Le triangle AHC est rectangle en H, le théorème de Pythagore permet donc d'affirmer que $AC^2 = AH^2 + HC^2$ d'où $64 = 4{,}8^2 + HC^2$; $HC^2 = 64 - 4{,}8^2 = 64\text{-}23{,}04 = 40{,}96$.

On en déduit que $HC = \sqrt{40,96} = 6,4$.

La longueur HC mesure donc 6,4 cm.

Exercice 2

Première version :

Dans le triangle AEF, $AF^2 = 15^2 = 225$; $AE^2 + EF^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.

On constate que $AF^2 = AE^2 + EF^2$, le triangle AEF est donc rectangle en E. Les droites (AB) et (EF) sont donc perpendiculaires.

$\frac{AE}{AB} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Les triangles ABC et AEF sont en situation de Thalès, de plus $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, les droites (EF) et (BC) sont donc parallèles.

(EF) et (BC) sont parallèles et (AB) est perpendiculaire à (EF), donc (AB) est perpendiculaire à (BC), le triangle ABC est donc rectangle en B.

Deuxième version :

$\frac{AE}{AB} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Les triangles ABC et AEF sont en situation de Thalès, de plus $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, les droites (EF) et (BC) sont donc parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AEF, ce qui permet d'affirmer que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.

On a donc $\frac{9}{BC} = \frac{3}{4}$ d'où on tire $\frac{BC}{9} = \frac{4}{3}$ et $BC = \frac{36}{3}$ =12.

Dans le triangle ABC, $AC^2 = 20^2 = 400$; $AB^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$.

On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$, le triangle ABC est donc rectangle en B.

Remarques :

— *Rappelons que, pour prouver une égalité (afin de démontrer que deux droites sont parallèles, ou qu'un triangle est rectangle), nous conseillons fortement de calculer de façon indépendante chacune des deux quantités et de constater ensuite qu'elles sont égales. Toute rédaction commençant par « $AF^2 = AE^2 + EF^2$ » alors que l'égalité n'est pas encore prouvée est suspecte. Ce conseil est également valable quand on cherche à prouver que les deux quantités ne sont pas égales.*

— *Nous nous sommes permis d'utiliser directement les longueurs AB et AC, qui ne sont pas fournies par l'énoncé, parce que leur calcul allongerait la rédaction alors qu'il ne présente aucune difficulté.*

Exercice 3

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°, donc :
$\widehat{ACB} = 180°\text{-}\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 180°\text{-}19°\text{-}71° = 90°$
Le triangle ABC est donc rectangle en C et $sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$.
On a donc $sin 19° = \frac{BC}{10}$, d'où $BC = 10 \times sin 19°$; $BC \approx 3,3\,cm$.

Remarque : nous avons utilisé le sinus de l'angle de sommet A, il revenait au même de parler du cosinus de l'angle de sommet B.

Exercice 4

Les informations de l'énoncé permettent d'appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AXY, on en déduit que $\frac{AC}{AY} = \frac{AB}{AX}$
Y est sur [AC], donc AY= AC-YC=AC-9. Il en résulte que $\frac{AC}{AC-9} = \frac{14}{8}$.
Quand deux fractions sont égales, les produits en croix sont égaux, on a donc $8AC = 14\,(AC - 9)$, donc $8AC = 14AC - 126$; $6AC = 126$; $AC = \frac{126}{6} = 21$.
Le segment [AC] mesure 21 cm.

Exercice 5

Première version :

Le triangle ABC est rectangle en A, la propriété de Pythagore permet donc d'affirmer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ soit $196 = AB^2 + AC^2$

On obtient de la même façon, dans les triangles rectangles ABH et ACH les égalités $AB^2 = AH^2 + 100$ et $AC^2 = AH^2 + 16$.

En reportant ces valeurs de AB^2 et AC^2 dans la première égalité, on obtient :
$196 = AH^2 + 100 + AH^2 + 16$.
Il en résulte que $2\ AH^2 = 80$; $AH^2 = 40$; $AH = \sqrt{40}$ cm.

Deuxième version :

ABC est rectangle en A, donc A est sur le cercle de diamètre [BC]. Soit M le milieu de [BC] (et donc le centre du cercle), on a donc MA = MB = BC/2 = 7 cm. De plus, MH = BH - BM = 3 cm.

Le triangle AMH est rectangle en H, la propriété de Pythagore permet donc d'affirmer que $AM^2 = MH^2 + AH^2$ soit $49 = 9 + AH^2$.

Il en résulte que $AH^2 = 40$ donc $AH = \sqrt{40}$ cm.

Troisième version :
L'angle $\widehat{BAC}$ est droit, par conséquent $\widehat{HAC} = 90° - \widehat{BAH}$.

Le triangle BAH est rectangle en H, la somme de ses deux angles aigus est donc égale à 90°, par conséquent $\widehat{ABH} = 90° - \widehat{BAH}$.

Les égalités précédentes montrent que $\widehat{HAC} = \widehat{ABH}$ donc que $tan\widehat{HAC} = tan\widehat{ABH}$

Dans le triangle rectangle ABH, $tan\widehat{ABH} = \frac{AH}{BH}$.

Dans le triangle rectangle ACH, $tan\widehat{HAC} = \frac{HC}{AH}$.

On a donc $\frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH}$ et par conséquent $AH^2 = BH \times HC = 10 \times 4 = 40$

$\mathrm{AH}^2 = 40$ donc $\mathrm{AH} = \sqrt{40}$ cm.

Remarque : l'usage dans l'enseignement secondaire est de simplifier l'écriture $\sqrt{40}$ en $2\sqrt{10}$.

Si vous l'avez fait, votre réponse est bien entendu correcte. Cependant, ce type de simplification n'est pas une priorité au concours. Nous vous conseillons si vous n'êtes pas déjà au point sur cette question de ne pas vous en soucier.

Exercice 6

X est sur le cercle de diamètre [AC] donc le triangle AXC est rectangle en X. On en déduit que (XA) est perpendiculaire à (XC)

Y est sur le cercle de diamètre [BC] donc le triangle BYC est rectangle en Y. On en déduit que (YB) est perpendiculaire à (YC), c'est à dire à (XC).

Les droites (XA) et (YB) sont perpendiculaires à (XC), elles sont donc parallèles entre elles.

Les triangles AXC et BYC sont tels que B est sur (AC), Y est sur (XC) et (YB) // (XA). Le théorème de Thalès permet alors d'affirmer que $\frac{CX}{CY} = \frac{CA}{CB}$. En utilisant les valeurs numériques données, on obtient : $\frac{CX}{6} = \frac{12}{8}$ d'où $CX = \frac{6 \times 12}{8} = 9$.

La longueur CX mesure 9 cm.

Exercice 7

Appelons H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC.

Dans le triangle AHC, rectangle en H, $sin24° = \frac{HC}{5}$ donc $HC = 5 \times sin24°$.

Dans le triangle BHC, rectangle en H, $sin64° = \frac{HC}{BC}$ donc $HC = BC \times sin64°$ et $BC = \frac{HC}{sin64°}$.

En remplaçant HC par la valeur calculée à la première étape, on obtient $BC = \frac{5 \times sin24°}{sin64°}$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient l'arrondi au centième de centimètre près : BC $\approx$ 2,26 cm.

Remarque : la « valeur exacte » de BC est l'expression$\frac{5 \times sin24°}{sin64°}$. Il n'est pas possible de l'obtenir à partir d'une valeur approchée de HC.

Même si l'énoncé n'avait demandé que la valeur arrondie au centième de BC, nous aurions tout de même dû calculer cette valeur exacte, car en calculant BC à partir d'une valeur approchée de HC il n'est pas possible d'affirmer que la précision obtenue est suffisante.

Exercice 8

Soit M le milieu de [BC]. Le triangle ABC est isocèle en A donc la médiane [AM] est aussi la hauteur issue de A. Il en résulte que le triangle AMB est rectangle en M.

Dans le triangle rectangle ANB :

$sin\widehat{BAM} = \frac{BM}{AB} = \frac{2}{5}$, par conséquent $\widehat{BAM} = sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 23,6°$.

Dans le triangle ABC, isocèle en A, la médiane issue de A est aussi la bissectrice de l'angle de sommet A.

Par conséquent, $\widehat{BAC} = 2 \times \widehat{BAM} = 2 \times sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 47,2°$.

Remarque : pour le calcul final, on utilise la valeur exacte de $\widehat{BAM}$ *et non sa valeur approchée* $23,6^\circ$ *afin d'éviter d'éventuelles erreurs d'arrondi.*