

Deux situations pour bien distinguer l'aire et le périmètre

La confusion entre ces deux notions résulte généralement d'un usage trop précoce ou trop important des formules de calcul : un élève pour qui les mots « périmètre » et « aire » évoquent essentiellement les formules $(L + l) \times 2$ et $L \times l$ a toutes les chances de les confondre.

S'il n'est pas difficile de définir pour les élèves ce qu'est le périmètre d'une figure (c'est la longueur du trait qui en fait le tour) c'est plus délicat pour l'aire, c'est pourquoi nous proposons dans un autre document une approche détaillée de ce qu'est l'aire.

Néanmoins, les formules de calcul d'aire (et malheureusement de périmètre) étant au programme il nous semble nécessaire périodiquement de proposer des situations qui reviennent au sens premier de ces deux notions, sans recourir aux formules (et même sans recourir au nombre pour les deux situations que nous proposons ici).

La figure à transformer

Le périmètre est plus petit que celui du modèle.


Le périmètre est égal à celui du modèle.

Le périmètre est plus grand que celui du modèle.

L'aire est plus grande que celle du modèle.

L'aire est égale à celle du modèle.

L'aire est plus petite que celle du modèle.

Quand les élèves entrent dans la classe, le maître a déjà dessiné le tableau ci-dessus avec ses légendes et la figure centrale.

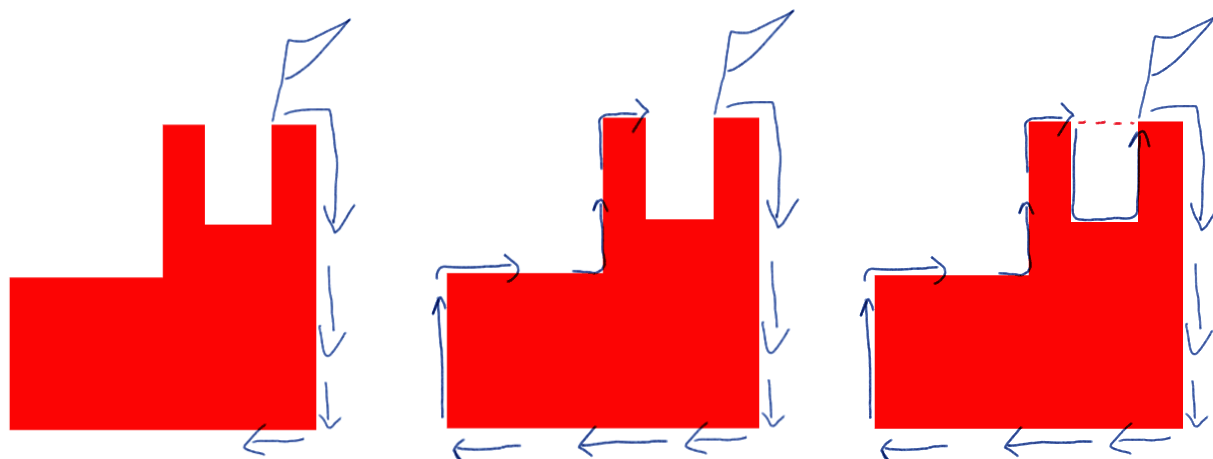
— Votre travail va consister à inventer des figures. Vous aurez des figures-modèles, ce sont les mêmes que celle du tableau. Toutes vos figures devront être fabriquées à partir du modèle, en le transformant un peu, par exemple en lui enlevant un petit morceau, en ajoutant un morceau, en la coupant en deux et en déplaçant les morceaux, en la pliant...

Je vais vous donner un exemple, ce sera plus simple : je prends la figure modèle et je lui enlève un petit morceau comme ça :



— Jusque là, ce n'est pas très difficile, le vrai travail commence maintenant : pour chaque figure inventée, il faudra la placer dans la bonne case du tableau. Pour cela, il faudra trouver si son périmètre est plus petit, plus grand ou bien égal au périmètre du modèle, et trouver si son aire est plus petite, plus grande ou bien égale à celle du modèle.

Par exemple, pour ma figure, l'aire est plus petite puisque cette nouvelle figure tient entièrement dans le modèle, il y a un morceau en moins.





Pour comparer les périmètres, je fais le tour de ma nouvelle figure. Je dessine un petit drapeau pour ne pas oublier d'où je suis parti, et je tourne comme ça...

Au début, je fais exactement le même trajet que si je faisais le tour du modèle, ce n'est ni plus long ni moins long... mais à la fin, ça change :

pour finir le tour de la nouvelle figure, je fais un détour en suivant le trait bleu,
pour finir le tour du modèle je passe sur le pointillé rouge qui est beaucoup plus court.

Pour faire le tour de la nouvelle figure, le chemin est plus long que pour faire le tour du modèle. Le périmètre de la nouvelle figure est plus grand que celui du modèle.



Ma nouvelle figure a une aire plus petite que celle du modèle et un périmètre plus grand que celui du modèle, elle va donc dans cette case du tableau, d'accord ?

	Le périmètre est plus petit que celui du modèle.	Le périmètre est égal à celui du modèle.	Le périmètre est plus grand que celui du modèle.
L'aire est plus grande que celle du modèle.			
L'aire est égale à celle du modèle.			
L'aire est plus petite que celle du modèle.			

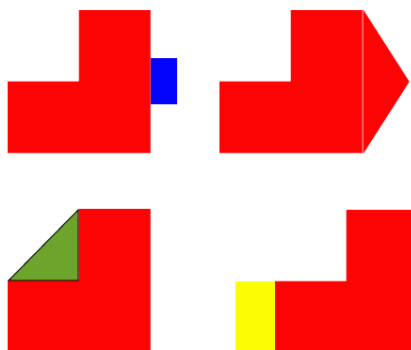
— Maintenant, c'est à vous de faire la même chose : inventer de nouvelles figures puis chercher dans quelle case du tableau elles vont. Vous avez 15 minutes pour faire ce travail.

Chaque groupe dispose pour faire le travail de ses instruments de géométrie, de quelques feuilles A4 avec chacune un exemplaire du modèle, de quelques feuilles vierges, de ciseaux et de colle. Après un quart d'heure de recherche environ, le maître procède à une première mise en commun.

— Vous avez inventé beaucoup de figures, nous allons les placer ensemble dans le tableau. Pour aller plus vite, je vais numéroter les cases comme ceci :

	Le périmètre est plus petit que celui du modèle.	Le périmètre est égal à celui du modèle.	Le périmètre est plus grand que celui du modèle.
L'aire est plus grande que celle du modèle.	1	2	3
L'aire est égale à celle du modèle.	4	5 	6
L'aire est plus petite que celle du modèle.	7	8	9 

—Nous allons commencer par la case 3, celle où le périmètre est plus grand que celui du modèle et où l'aire est aussi plus grande. Si vous avez une figure qui va dans la case 3, venez l'afficher au tableau.



—Qu'en pensez-vous ? Je crois qu'on peut aller vite pour l'aire : toutes les nouvelles figures ont été faites en rajoutant un morceau au modèle, la nouvelle figure recouvre entièrement le modèle, son aire est plus grande.

Pour le périmètre, c'est un peu plus difficile à voir.

Ce qu'on veut savoir, c'est si le trait qui fait le tour de la nouvelle figure est plus long que celui qui fait le tour du modèle... je vous laisse y réfléchir un peu...

...Nicolas, qu'en penses-tu ?

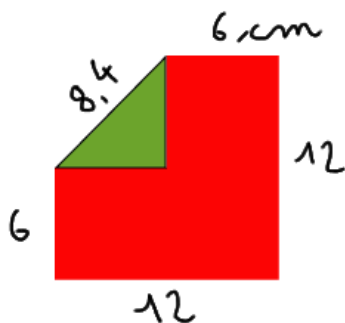
—C'est plus long parce qu'on a rajouté quelque chose.

—Louna, je crois que tu n'étais pas d'accord avec les autres enfants de ton groupe, tu peux nous dire pourquoi ?

—Nous avons fait la figure avec du vert. J'ai mesuré et le tour est plus petit que sur le modèle, il fait 44 cm et demi au lieu de 48 cm.

—ça va pas ce qu'elle dit Louna, on a rajouté un morceau, alors c'est forcément plus grand.

Nathalie, toi qui n'es pas d'accord avec Louna, viens mesurer le périmètre de la nouvelle figure.

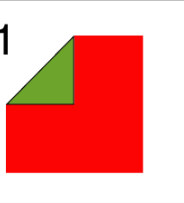

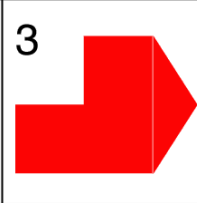
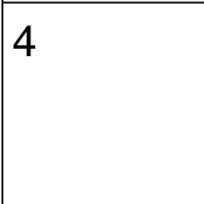
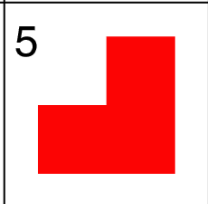
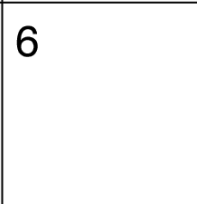
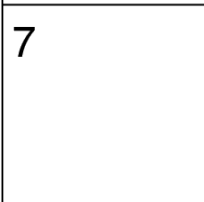
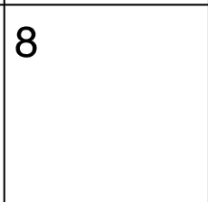
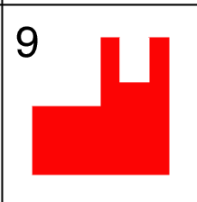


—Et bien, son périmètre il mesure $6 + 12 + 12 + 6 + 8,4$ ça fait...euh, ça fait ... Après un calcul plus ou moins aisé selon ses capacités en calcul mental, Nathalie trouve que le périmètre de la nouvelle figure mesure 44,4 cm. Ce n'est pas tout à fait ce qu'avait dit Louna, mais la conclusion est la même : le périmètre est plus petit que celui du modèle.

— Si cette figure ne va pas dans la case 3, elle va dans une autre case, vous voyez laquelle ?

—La case un, la case un.

—Oui, le périmètre est plus petit que sur le modèle et l'aire est plus grande, cette figure va dans la case 1 de notre tableau. Je mets une des autres figures dans la case 3, et voilà ce qu'on obtient :

	Le périmètre est plus petit que celui du modèle.	Le périmètre est égal à celui du modèle.	Le périmètre est plus grand que celui du modèle.
L'aire est plus grande que celle du modèle.	1 	2 	3 
L'aire est égale à celle du modèle.	4 	5 	6 
L'aire est plus petite que celle du modèle.	7 	8 	9 

—Louna a eu raison de nous signaler que la figure avec un morceau vert a un périmètre plus petit que le modèle, mais on pouvait le savoir sans mesurer, voyez-vous comment ? Essayez de retrouver l'explication que j'ai donnée pour la figure de la case 9. C'est presque pareil.

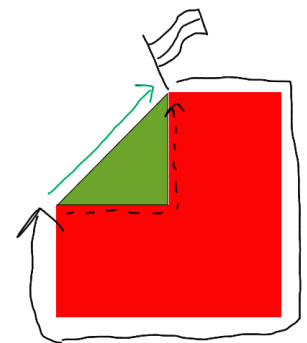
—Quelqu'un veut essayer d'expliquer sans se servir de nombre pourquoi le périmètre est plus petit que celui du modèle ? Titouan ?

—Je fais comme tu as fait tout à l'heure : tout le long de mon trait noir, c'est pareil pour le modèle et pour la figure de Louna, mais à la fin, pour finir le tour de la figure de Louna, je vais tout droit, c'est un raccourci, alors que sur le modèle il faut faire un détour, c'est plus long.

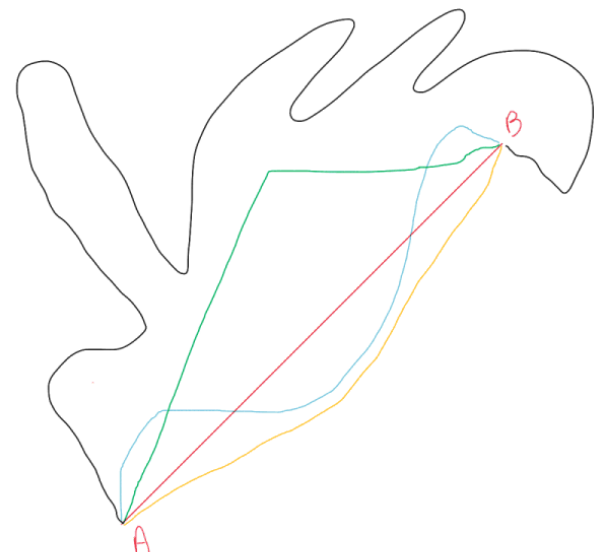
—Vous êtes d'accord avec Titouan ?

—Oui, oui...

—Et bien vous avez raison, Titouan nous a dit quelque chose que vous pouvez retenir, parce que ça pourra servir pour d'autres figures : quand on suit un trait tout droit, c'est plus court qu'un chemin qui fait des détours.



Par exemple sur ce dessin, pour aller du point A au point B, le chemin le plus court est le trait rouge parce qu'il est tout droit, les autres chemins sont plus longs. Pour le trait noir, ça se voit facilement, mais pour le trait jaune ça ne se voit pas très bien : il n'est pas beaucoup plus long que le trait rouge, mais il est plus long.



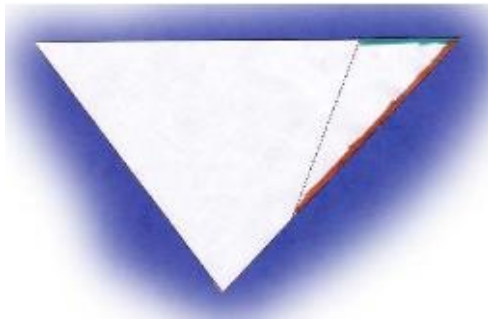
Le travail se poursuit sur le même mode.

Si toutes les cases ne sont pas remplies, ce n'est pas très important.

La figure qui diminue en grandissant

Il est souhaitable de proposer la situation « la figure à transformer » préalablement à celle-ci. L'enseignant est devant le tableau et demande aux élèves d'observer ce qu'il va faire.

Voici un triangle en papier.



Je trace un trait qui le découpe en deux parties et je passe en couleur deux côtés de la partie qui est un triangle.



Je découpe les deux parties en suivant mon trait.



Je retourne le petit triangle à l'envers (les tracés de couleur sont maintenant tournés vers le tableau).



Je recolles les deux morceaux en suivant le trait de coupe (*repassé en pointillé sur la photo*).



Je repasse les segments coloriés de la même couleur que du côté caché.



Je rajoute un petit triangle vert pour "boucher le trou".
J'obtiens une nouvelle figure, c'est un quadrilatère.



Pour que les élèves puissent prendre en compte les différentes étapes, il faut qu'elles restent présentes au tableau simultanément.

Le maître a préparé 7 triangles identiques, dont 6 sur lesquels est tracé le même trait de coupe.

à chaque étape, il laisse au tableau la figure dans l'état correspondant à une photo.

Il prend alors un nouveau triangle, refait plus rapidement toutes les étapes déjà effectuées et montre lentement la nouvelle étape.

Quand le procédé est bien compris, on ne laisse que les trois étapes principales ci-dessous et on les nomme.



A



B



C

Vous allez devoir comparer le périmètre de la figure A avec celui de la figure B. Comparer, c'est dire lequel est le plus grand. À cette question, il n'y a que trois réponses possibles :

Le périmètre de A est plus grand que celui de B.

Le périmètre de B est plus grand que celui de A.

Les deux figures ont le même périmètre.

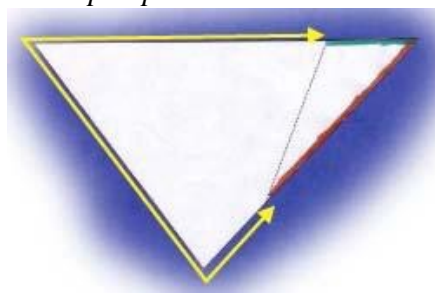
Si le maître n'est pas certain que tous les élèves se souviennent de ce qu'est le périmètre d'une figure, il le rappelle avant de les laisser travailler : c'est la longueur du trait qui fait le tour de la figure.

Attention, vous n'avez pas le droit de vous déplacer pour venir mesurer.

Bien entendu, c'est un travail de mathématique et pas de devinette, vous devez donc dire pourquoi vous pensez que votre réponse est juste.

Quand votre groupe s'est mis d'accord, il écrit sa réponse sur la feuille que je vous donne et il réfléchit à l'explication qu'il peut donner pour les autres groupes.

Lors de la mise en commun, l'explication attendue est à peu près celle-ci :



Pour faire le tour de la figure A, je passe sur le trait jaune, le vert et le marron.

Pour faire le tour de la figure B, je passe sur les mêmes traits, je fais autant de chemin, les périmètres sont les mêmes.

Si aucun groupe ne trouve d'argument approchant, le maître fournit la réponse et demande aux élèves s'il est nécessaire de mesurer pour vérifier. Il espère que les élèves jugeront que ce n'est pas nécessaire, mais si certains ne sont pas convaincus, on procède à la mesure sur le tableau, et on écrit les deux calculs, par exemple :

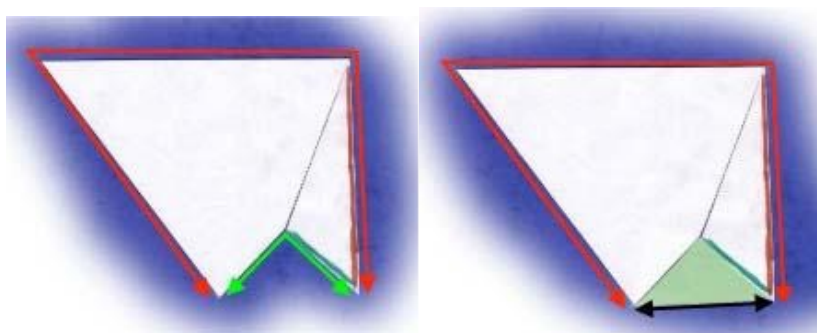
$$\text{Périmètre de A} = 53 \text{ cm} + 13 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$$

$$\text{Périmètre de B} = 53 \text{ cm} + 13 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$$

Le résultat des sommes n'est volontairement pas écrit, on espère que le contexte numérique familier rendra le raisonnement plus convaincant : on ajoute les mêmes morceaux, on obtient donc le même résultat.

Les élèves comparent ensuite les périmètres de B et C.

Lors de la mise en commun, l'explication attendue pour justifier que le périmètre de C est plus petit que celui de B est le suivant :



Le trait rouge est le même sur les deux figures.

Le trait vert est plus long que le trait noir : c'est plus long de faire un détour que d'aller tout droit.

Le périmètre de B, c'est la longueur du trait rouge plus celle du trait vert, le périmètre de C c'est la longueur du trait rouge plus celle du trait noir. Alors, le périmètre de B est plus long que celui de C.

Lors d'une troisième phase de travail en groupe, l'enseignant pose deux questions :

Première question : comparez les périmètres des figures A et C.

Deuxième question : comparez les aires des figures A et C.

Les réponses attendues sont :

- Le périmètre de C est plus petit que celui de B et le périmètre de B est le même que celui de A, alors le périmètre de C est plus petit que celui de A.
- L'aire de C est plus grande que celle de A, parce que la figure C est formée avec les deux morceaux de la figure A et qu'on a rajouté le triangle vert. Il y a plus de papier dans la figure C, l'aire est plus grande.

Conclusion du travail : En transformant la figure A pour obtenir la figure C, on a fait grandir son aire, mais on a diminué son périmètre.

Quand on compare deux figures, celle qui a le plus grand périmètre n'a pas forcément la plus grande aire.

Remarque : les transformations appliquées à la figure A peuvent être utilisées pour n'importe quel autre polygone... et en particulier la figure C.

Il est donc possible à partir d'une figure initiale de construire autant de nouvelles figures qu'on voudra, le périmètre diminuant à chaque étape alors que l'aire augmente à chaque étape.

Les pages qui suivent montrent quatre étapes successives à partir d'un triangle.

Réaliser ainsi plusieurs étapes à partir d'une même figure est un projet intéressant, mais exigeant.

