

Les boucles de nombres

En bref

On invente des suites de nombres entiers en suivant un processus imposé.

Le but est d'obtenir une boucle la plus longue possible : le premier nombre et le dernier sont identiques, tous les autres nombres sont différents.

Introduction du problème

— Nous allons écrire des suites de nombres entiers en utilisant uniquement les trois procédés suivants

— Multiplier par 2 puis ajouter 1 au résultat (les deux opérations à la suite sont considérées comme une seule étape, il est interdit de seulement multiplier par 2 ou de seulement ajouter 1)

— Diviser par 3 (autorisé seulement si le reste est 0)

— Diviser par 5 (autorisé seulement si le reste est 0)

— En commençant par 25, je peux par exemple écrire la suite suivante :

25 51 103 207 69 23 47 95 19 39 13...

On prend le temps de vérifier que chaque étape utilise bien un des trois procédés autorisés.

— Parfois, il arrive qu'on retrouve dans la suite un nombre qu'on a déjà écrit :

15 3 7 15

5 1 3 7 15 5

1 3 1

— Je viens d'écrire des boucles. Une boucle est une suite de nombres écrits en suivant les règles, qui sont tous différents sauf le premier et le dernier.

Votre but est d'inventer de nouvelles boucles.

Nous conserverons dans le classeur de recherche toutes les boucles que vous trouverez, mais nous allons surtout chercher à trouver des boucles très longues.

— Ce travail est aussi une occasion de faire du calcul mental, je vous demande donc de le faire sans utiliser de calculatrice, même quand vous chercherez sur vos temps libres. Si vous continuez à chercher chez vous, je n'irai évidemment pas vérifier que vous ne prenez pas de calculatrice... je vous fais confiance pour respecter la règle du jeu. D'ailleurs, si vous êtes fatigué de calculer de tête ou à la main il y a une solution très simple : arrêtez de chercher ce problème et faites autre chose.

Éléments de relance

Les remarques suivantes seront probablement faites tôt ou tard.

— Il peut y avoir des nombres pairs au début d'une suite, mais dès qu'il y a un nombre impair, tous les autres sont impairs.

— Il y a des nombres « trous noirs », par exemple 14 ou 44. Quand on écrit un de ces nombres dans la suite, on n'a plus jamais l'occasion de diviser par 3 ou 5, les nombres augmentent sans cesse, on ne peut pas faire une boucle.

Dans un premier temps, l'enseignante manifestera du doute à propos de ces remarques :

— Je vois bien ce que vous dites, mais qu'est-ce qui vous assure que c'est toujours vrai ? Dans vos suites il n'apparaît jamais de nombre pair après un nombre impair, mais c'est peut-être parce que vous n'avez pas envisagé toutes les possibilités.

— Et vos nombres « trous noirs », peut-être qu'avec un peu de patience, en augmentant jusqu'à des nombres de plusieurs millions ou plusieurs milliards on trouverait l'occasion de diviser par 3 ou 5.

Rapidement, l'enseignante confirmera que ces deux remarques sont vraies. Elle peut demander aux élèves de lui faire confiance sur ce point (les démonstrations sont faciles avec les outils du cycle 4) ou justifier en s'appuyant par exemple sur les exemples fournis en rubrique « connaissances ».

Si les élèves trouvent des boucles de plusieurs dizaines de nombres, le risque devient important de croire avoir une grande boucle alors qu'il y a deux nombres égaux à l'intérieur (et donc qu'il y a bien une boucle, mais plus petite que ce qu'on pense). Pour s'assurer qu'il n'y a pas de doublon dans une boucle longue, on peut proposer une des procédures suivantes :

- Parcourir la boucle et recopier tous les nombres en les groupant par taille (par exemple les nombres inférieurs à 50, ceux compris entre 50 et 100. . . . Chaque groupe comportant peu de nombres, le repérage des doublons est facilité.
- Écrire chaque nombre de la boucle sur un petit papier puis ranger les papiers par ordre croissant.

Éléments de preuve

Nous conjecturons (mais nous n'avons pas de preuve) qu'il n'y a pas de limite à la taille des boucles qu'on peut obtenir.

Prolongements pour le cycle 4

Démontrer algébriquement les deux propriétés évoquées plus haut.

Compléments

Voici une boucle de 20 nombres.

47	95	19	39	13	27	9
3	7	15	31	63	21	43
87	175	351	117	235	47	

Peut-on faire mieux ?

13	27	55	111	223	447	895
1791	597	199	399	133	267	535
107	215	43	87	175	35	7
15	5	11	23	47	95	19
39	13					

Oui, on pouvait puiseque la boucle ci-dessus comporte 30 nombres.

Peut-on faire mieux ?

Sans aucun doute puisque voici une boucle de 38 nombres.

11	23	47	95	191	383	767
1535	307	615	203	407	815	163
337	675	135	45	15	31	63
127	255	511	1023	341	683	1367
2735	547	1095	219	73	147	49
99	33	11				

Peut-on faire mieux ?

...