# Chapitre 15

# Statistique, dénombrement et probabilités

## Statistiques

Le tableau suivant indique la taille en cm de chacune des personnes d'un groupe de 63 personnes.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 162 | 161 | 172 | 150 | 181 | 165 | 157 | 144 | 170 |
| 186 | 160 | 157 | 146 | 156 | 160 | 177 | 178 | 172 |
| 160 | 168 | 170 | 179 | 169 | 169 | 175 | 174 | 157 |
| 180 | 162 | 169 | 169 | 174 | 165 | 174 | 174 | 174 |
| 157 | 162 | 169 | 161 | 170 | 163 | 179 | 171 | 167 |
| 188 | 173 | 153 | 162 | 169 | 186 | 175 | 181 | 166 |
| 167 | 167 | 170 | 160 | 156 | 145 | 170 | 159 | 193 |

Seul le tableau complet comporte toutes les informations, mais il est possible de transmettre une partie des informations sous une forme plus condensée. On peut par exemple regrouper les personnes dont la taille est proche et indiquer seulement l'effectif de chaque catégorie.

| taille en cm | effectif |
|---|---|
| de 140 à 149 | 3 |
| de 150 à 159 | 9 |
| de 160 à 169 | 24 |
| de 170 à 179 | 20 |
| de 180 à 189 | 6 |
| de 190 à 199 | 1 |

Parfois, on préfère indiquer non pas l'effectif de chaque catégorie (le nombre de personnes mesurant de 160 à 169 cm par exemple), mais l'effectif cumulé de toutes les catégories jusqu'à celle-ci (le nombre de personnes mesurant jusqu'à 169 cm). Le tableau suivant donne, sous une autre forme, exactement les mêmes informations que le précédent.

| taille en cm | effectif cumulé |
|---|---|
| de 140 à 149 | 3 |
| de 150 à 159 | 12 |
| de 160 à 169 | 36 |
| de 170 à 179 | 56 |
| de 180 à 189 | 62 |
| de 190 à 199 | 63 |

Supposons qu'on veuille comparer la taille des personnes de ce groupe à celle d'un groupe de 10 000 personnes parmi lesquelles 250 mesurent plus de 190 cm.

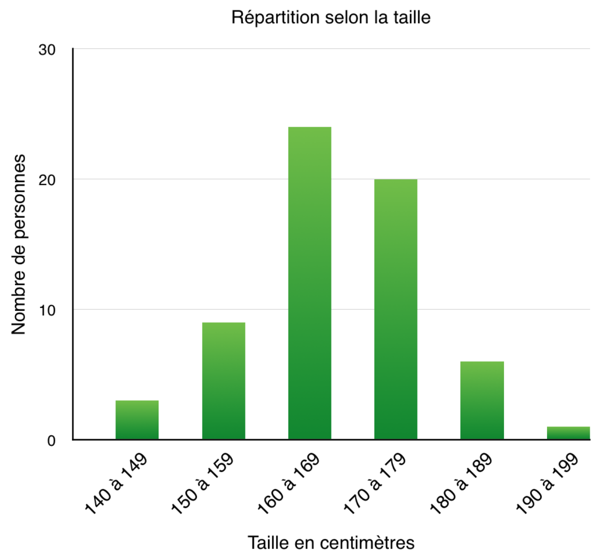
Dire qu'il y a plus de personnes grandes dans le groupe de 10 000 que dans notre groupe exemple de 63 personnes n'a pas beaucoup d'intérêt, c'est pourquoi on indique parfois les fréquences en complément ou à la place des effectifs. C'est en lisant les colonnes « fréquence » qu'on peut comparer les deux groupes.

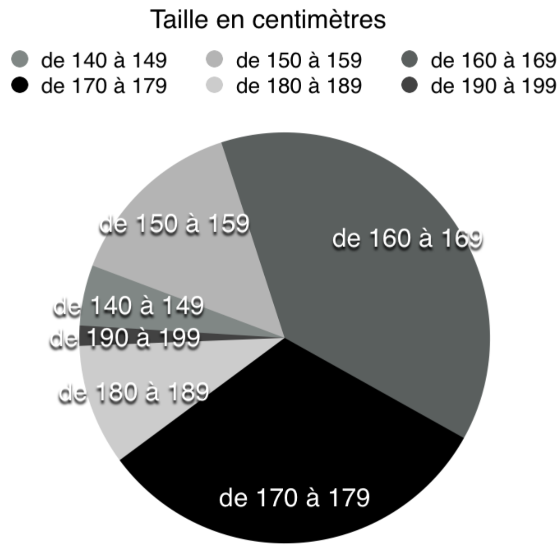
| taille en cm | effectif | fréquence |
|---|---|---|
| de 140 à 149 | 3 | 0,048 |
| de 150 à 159 | 9 | 0,143 |
| de 160 à 169 | 24 | 0,381 |
| de 170 à 179 | 20 | 0,317 |
| de 180 à 189 | 6 | 0,095 |
| de 190 à 199 | 1 | 0,016 |

| taille en cm | effectif | fréquence |
|---|---|---|
| de 140 à 149 | 203 | 0,020 |
| de 150 à 159 | 1843 | 0,184 |
| de 160 à 169 | 3261 | 0,326 |
| de 170 à 179 | 2884 | 0,288 |
| de 180 à 189 | 1568 | 0,157 |
| de 190 à 199 | 241 | 0,024 |

Le calcul de la fréquence d'une catégorie est facilité par le langage. En effet, on dit que 9 personnes sur 63 mesurent de 150 à 159 cm, le calcul de la fréquence correspond exactement à cette expression *9 sur 63*, la fréquence de la catégorie « de 150 à 159 cm » est $\frac{9}{63}$ soit environ 0,14 ou 14%.

Les données peuvent aussi être représentées par différents graphiques, dont voici deux exemples :




Parfois, notamment si on doit comparer le groupe de personnes dont il est question à d'autres groupes, ces tableaux ou ces graphiques sont encore trop complexes, et on cherche à décrire l'ensemble du groupe par un seul nombre. On utilise alors la moyenne ou la médiane.

La moyenne des tailles de ce groupe se calcule exactement comme vous avez toujours calculé vos moyennes de notes pendant votre scolarité : on calcule la somme de toutes les tailles, et on divise par le nombre de personnes.

Pour notre groupe, la moyenne des tailles est égale à 10555 cm : 63 soit environ 167,5 cm.

La médiane, c'est la taille d'une personne située « au milieu » du groupe, qui a autant de personnes plus petites qu'elles que de personnes plus grandes.

Notre groupe comportant 63 personnes, si on les range par ordre de taille croissante (ou décroissante), la 32$^{\text{e}}$ personne aura exactement 31 personnes devant elle et 31 derrière elle, la taille de cette 32$^{\text{e}}$ personne sera la médiane. la taille médiane de notre groupe est de 169 cm.

Remarques :

— la définition de la médiane est fluctuante. Elle n'est pas la même dans toutes les séries du baccalauréat, on trouve même des ouvrages où figurent deux définitions incompatibles de la médiane. C'est pourquoi, s'il en est question au concours, on ne vous proposera que des cas sans ambiguïté : s'il y avait 64 personnes et non 63 dans notre groupe exemple, la 32$^{\text{e}}$ et la 33$^{\text{e}}$ personne auraient la même taille, qui serait donc la médiane.

— Comme nous l'avons dit, la moyenne et la médiane visent à décrire par un seul nombre toutes les données à propos d'une population. Bien entendu, on perd ainsi une grande partie de l'information. Si un groupe de trente étudiants ayant chacun un revenu mensuel de 600 € accueille dans ses rangs un nouveau venu, fils de Bill Gates ou de l'émir du Qatar, il se peut que le revenu moyen dans le groupe de 31 étudiants ainsi constitué passe à 2000 € mensuel… mais le revenu médian est toujours de 600 €. Décider si l'information donnée par la moyenne a, ou non, plus de sens que celle fournie par la médiane ne relève pas des mathématiques.

# Probabilités

On dit couramment qu'on a une chance sur six de tirer un cinq avec un dé, ou une chance sur deux que le prochain bébé soit une fille.

Ce qu'on appelle probabilité d'un événement correspond exactement aux expressions du type « trois chances sur quatre ». Si un événement à trois chances sur quatre de se produire, sa probabilité est de trois sur quatre, c'est-à-dire de trois quarts.

Une conséquence immédiate est que la probabilité d'un événement ne peut pas être supérieure à 1 (a-t-on déjà vu un événement avoir cinq chances sur quatre de se produire ?).

Pour un événement plus complexe comme obtenir 15 en lançant trois dés, ou avoir exactement deux filles dans une famille de quatre enfants, il n'est pas aussi facile d'estimer les « chances » qu'il se produise. C'est le but du calcul de probabilités.

**Exemple d'exercice**

On lance un dé bleu et un dé rouge, quelle est la probabilité d'obtenir un total de 8 ?

**Solution rédigée**

Tirage du dé bleu

| Tirage du dé rouge | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **8** |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **8** | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | **8** | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | **8** | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | **8** | 9 | 10 | 11 | 12 |

Le tableau ci-dessus représente tous les tirages possibles. Si les dés sont équilibrés, chacun de ces tirages a autant de chances de se produire. Les tirages dont la somme est 8 sont en gras. Il y en a 5 sur 36 tirages possibles, la probabilité de tirer 8 avec deux dés est donc $\frac{5}{36}$.

**Deuxième exemple d'exercice**

Un sac contient 6 jetons numérotés de 1 à 6, on tire successivement deux jetons (sans remettre le premier), quelle est la probabilité d'obtenir un total de 8 ?

**Solution rédigée**

Premier jeton

| Second jeton | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **8** |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **8** | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | **8** | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | **8** | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | **8** | 9 | 10 | 11 | 12 |

Si le premier jeton tiré n'est pas remis, on ne peut pas tirer deux fois le même nombre. Les cases grisées ne décrivent donc pas des événements possibles dans ce problème. Il y a donc 30 tirages possibles, parmi lesquels 4 conduisent à une somme de 8. Il y a 4 chances sur 30 d'obtenir 8 en tirant deux jetons, la probabilité d'obtenir 8 avec deux jetons est donc $\frac{4}{30}$.

*Remarques :*

— *Les tableaux ne permettent pas de répondre à tous les problèmes de probabilités que vous pouvez rencontrer. Si on tire trois dés et non deux, le tableau ne convient plus. Nous vous conseillons cependant de privilégier l'usage des tableaux, car ils permettent de bien comprendre ce dont on parle. D'autre part les problèmes du concours portent le plus souvent sur deux tirages seulement.*

— *Si le tableau ne convient plus, l'idée directrice reste la même : la probabilité d'obtenir un événement est le nombre de façons de l'obtenir divisé par le nombre total de possibilités (à condition bien sûr que chacune de ces possibilités ait autant de chance de se produire).*

— *La détermination du nombre de cas n'est pas toujours facile, c'est pourquoi nous proposons dans ce chapitre une partie spécifique sur les problèmes de dénombrement. Les méthodes qu'on emploie pour ces exercices peuvent servir aussi bien dans des problèmes présentés comme du dénombrement (combien y a-t-il de. . . ) que comme étape dans un problème de probabilités.*

# Problèmes de dénombrement

Les principaux conseils méthodologiques que l'on peut donner pour résoudre un problème de dénombrement figurent dans les indications du problème 4 de l'introduction, page 21.

Il s'agit essentiellement de partager l'ensemble des objets à dénombrer en familles, en s'assurant que chaque objet est dans une famille et dans une seule. On dénombre ensuite chacune des familles (ce qui est en général plus simple puisqu'il y a moins d'objets) puis on calcule la somme.

**Exemple d'exercice**

On lance un dé bleu un dé blanc et un dé rouge, quelle est la probabilité d'obtenir un total de 8 ?

Nous ne pouvons pas utiliser de tableau à double entrée pour représenter ce problème comme nous l'avons fait quand il n'y avait que deux dés.

Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Nous pouvons répartir ces tirages en 6 familles : les tirages où le dé bleu donne 1, ceux où le dé bleu donne 2… ceux où le dé bleu donne 6.

La famille des tirages où le dé bleu donne 1 peut à son tour être répartie en 6 sous-familles :

— les tirages où le dé bleu donne 1 et le dé blanc donne 1,
— les tirages où le dé bleu donne 1 et le dé blanc donne 2,
— …
— les tirages où le dé bleu donne 1 et le dé blanc donne 6.

Comme on peut faire la même chose avec chacune des six familles initiales obtenues en tenant compte du dé bleu, nous avons à présent $6 \times 6$ soit 36 sous-familles.

Chacune d'entre elles comporte six tirages possibles (le dé rouge peut lui aussi donner une valeur de 1 à 6)

Le nombre total de tirages différents est donc égal à $6 \times 6 \times 6$ soit 216.

Parmi ces tirages, combien donnent une somme de 8.

Nous pourrions à nouveau effectuer un découpage en familles, mais nous allons utiliser une autre stratégie : trouver un ordre dans lequel écrire les événements possibles, de façon à les écrire tous.

Nous allons représenter chaque tirage par une suite de trois chiffres. 325 signifiera qu'on a obtenu 3 avec le dé bleu, 2 avec le blanc, et 5 avec le rouge.

Pour trouver toutes les façons d'obtenir 8 sans en oublier, nous allons écrire les tirages dans l'ordre croissant des nombres de trois chiffres qui les décrivent. Ainsi, on écrira le nombre 125 pour décrire le tirage de 1, puis 2, puis 5. Voici les différentes manières d'obtenir 8 :

116 ; 125 ; 134 ; 143 ; 152 ; 161

215 ; 224 ; 233 ; 242 ; 251

314 ; 323 ; 332 ; 341

413 ; 422 ; 431

512 ; 521

611

Il y a donc 21 tirages ayant une somme de 8 sur 216 tirages possibles en tout, la probabilité d'obtenir 8 avec trois dés est de $\frac{21}{216}$.

*Remarque : la reformulation sous forme d'écritures à trois chiffres pour désigner les tirages est pratique, mais ce n'est en réalité qu'une autre façon de partager l'ensemble à dénombrer en familles plus petites : la première ligne est la famille des tirages ayant pour somme 8 avec 1 sur le dé bleu…*

# Exercices

### Exercice 1

La taille moyenne des personnes d'un groupe est de 1,60m. Xavier, qui mesure 2 mètres, se joint à ce groupe. La taille moyenne des personnes du groupe est maintenant de 1,65m.

Combien le groupe comptait-il de membres avant l'arrivée de Xavier ?

**Exercice 2**

La moyenne des notes de Anne en mathématiques cette année est de 12. Si Anne calcule sa moyenne sans tenir compte de sa note la plus basse (qui est 5) ni de sa note la plus élevée, elle trouve à nouveau 12. Quelle est la note la plus élevée que Anne a obtenue ?

**Exercice 3**

Une classe de 21 élèves a effectué un devoir noté sur 20. Le tableau ci-dessous indique les notes de 19 élèves de cette classe. Proposer une valeur pour chacune des deux notes manquantes de façon à ce que ni la moyenne ni la médiane ne soient modifiées.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 6 | 8 | 10 | 10 | 19 | 9 |
| 9 | 11 | 5 | 13 | 6 | 16 | 16 |
| 10 | 15 | 16 | 16 | 17 | | |

**Exercice 4**

On effectue 15 tirages successifs avec un dé ordinaire.

Peut-on obtenir simultanément une moyenne de 5 et une médiane de 3 ?

Peut-on obtenir simultanément une moyenne de 4 et une médiane de 3 ?

**Exercice 5**

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher, trois rouges et deux bleues. On tire une boule dans cette urne puis on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une boule. Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

**Exercice 6**

On lance successivement deux dés ordinaires. Quelle est la probabilité pour que la valeur du second tirage soit supérieure à celle du premier ?

**Exercice 7**

Quelle est la probabilité pour que, dans une famille de 4 enfants, il y ait deux filles et deux garçons ?

On considérera que, lors de la naissance d'un enfant, la probabilité que ce soit une fille et la probabilité que ce soit un garçon sont exactement de $1/2$.

**Exercice 8**

Un sac contient quatre boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4.

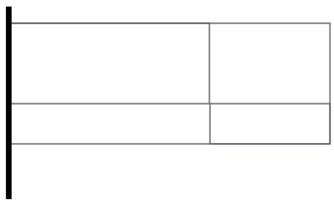
On tire successivement trois de ces boules, sans remettre les boules tirées avant d'effectuer le tirage suivant. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres tirés soit égale à 7 ?

**Exercice 9**

Combien peut-on dessiner de triangles rectangles dont les sommets soient placés sur les noeuds du quadrillage ci-dessous ? Dans ce problème, deux triangles de mêmes dimensions, mais utilisant des sommets différents sont considérés comme distincts.

**Exercice 10**

Un nouveau pays a choisi la forme de son drapeau (voir schéma). Chacune des quatre zones du drapeau sera d'une couleur unie. On n'utilisera pas d'autre couleur que le jaune le rouge ou le vert. Deux zones ayant un côté en commun ne peuvent pas être de la même couleur. Combien de drapeaux différents sont possibles ?



**Exercice 11**

On trace des triangles ayant un périmètre de 15 cm et dont tous les côtés mesurent un nombre entier de cm.

Combien de triangles différents peut-on tracer ?

**Exercice 12**

Un polygone a 12 côtés, combien a-t-il de diagonales ?

## Indications sur les exercices

**Exercice 1**

Il est possible de traduire ce problème par une équation, mais des raisonnements arithmétiques sont également possibles, y compris une recherche par essais successifs.

**Exercice 2**

Si la moyenne est de 12 pour 8 notes, la somme des notes est $8 \times 12$. Si on ajoute une note égale à 12, la somme devient $9 \times 12$ et la moyenne $(9 \times 12) : 9$ c'est-à-dire 12. De même, si on enlève une note égale à 12, la somme devient $7 \times 12$ et la moyenne $(7 \times 12) : 7$ c'est-à-dire 12.

Comment cela se généralise-t-il si on ajoute ou enlève plusieurs notes à la fois ?

**Exercice 3**

Pour conserver la moyenne et la médiane existantes, encore faut-il les connaître.

**Exercice 4**

La moyenne permet de trouver la somme des valeurs tirées, la médiane permet de trouver une des valeurs, si les 25 valeurs sont ordonnées.

Une des méthodes possibles consiste à préparer un tableau à 15 cases et à essayer de placer dans ce tableau des valeurs permettant d'obtenir la moyenne et la médiane demandées.

Pour montrer que quelque chose est possible, il suffit de le faire (ici, proposer 15 tirages qui conviennent). En revanche pour montrer qu'une chose est impossible, un raisonnement est nécessaire.

**Exercice 5**

Un tableau à double entrée convient parfaitement pour ce problème, à condition d'y faire figurer 5 événements élémentaires ayant la même chance de se produire. Si vous conservez seulement deux possibilités, « tirer une boule rouge » et « tirer une boule bleue », elles ne sont pas équiprobables puisqu'il n'y a pas le même nombre de boules de chaque couleur.

**Exercice 6**

Cet exercice peut être résolu comme le précédent à l'aide d'un tableau ou d'un arbre, mais on peut aussi s'appuyer sur le fait qu'il n'existe que trois possibilités :

— la valeur du deuxième tirage est plus grande ;
— la valeur du deuxième tirage est plus petite ;
— les deux valeurs sont égales.

La somme des probabilités de ces trois événements est égale à 1.

**Exercice 7**

Un arbre permet d'explorer toutes les possibilités.

**Exercice 8**

S'intéresser à la boule restante plutôt qu'à celles qu'on a tirées simplifie les choses.

**Exercice 9**

Classer les triangles rectangles suivant l'emplacement du sommet de l'angle droit nous semble une bonne idée.

**Exercice 10**

Distinguer le cas des drapeaux bicolores et celui des drapeaux tricolores facilite les choses.

**Exercice 11**

On peut classer ces triangles selon leur plus grand côté.

N'oublions pas que trois nombres dont la somme est 15 ne permettent pas toujours de tracer un triangle. Il n'existe pas de triangle dont les côtés mesurent 10 cm, 3 cm et 2 cm.

**Exercice 12**

Il faut s'assurer qu'avec les deux extrémités choisies on a bien une diagonale (et non un côté).

Il faut également tenir compte du fait que si on choisit le point A puis le point D, on obtient la même diagonale que si on choisit D puis A.

## Solutions des exercices

**Exercice 1**

Solution algébrique :

Soit $x$ l'effectif du groupe avant l'arrivée de Xavier. La moyenne de taille du groupe comprenant Xavier se calcule ainsi : $\frac{x\times 1{,}60+2}{x+1}$.

Cette taille moyenne étant de 1,65 mètre, on peut donc écrire :

$\frac{x\times 1{,}60+2}{x+1} = 1,65$

$x \times 1,60 + 2 = 1,65\,(x+1)$

$1,60x + 2 = 1,65x + 1,65$

$0,35 = 0,05x$

$x = \frac{0{,}35}{0{,}05} = \frac{35}{5} = 7$

Le groupe comptait 7 membres avant l'arrivée de Xavier.

Solution arithmétique :

Si Xavier mesurait 1,60 m, la taille moyenne n'augmenterait pas, ce sont ses 40 cm de plus qui font augmenter la taille moyenne de 5 cm.

Si 40 cm supplémentaires correspondent à 5 cm en moyenne, c'est-à-dire 5 cm par personne, c'est qu'ils sont répartis sur 8 personnes. Le groupe avec Xavier comprend donc 8 personnes, et le groupe sans Xavier en comprend 7.

**Exercice 2**

Solution algébrique :

Soit n le nombre de notes de mathématiques que Anne a obtenues cette année et E sa note la plus élevée.

La somme de ses notes est 12n.

La somme des notes sans tenir compte des deux notes extrêmes est 12(n-2), c'est aussi 12n-5-E.

On a donc 12(n-2) = 12n-5-E, d'où 12n-24 = 12n - 5 - E et E = 19.

Solution arithmétique :

La moyenne 12 ne change pas si on ajoute ou enlève deux notes égales à 12. Elle ne change pas non plus si on enlève deux notes dont la somme est 24 (la moyenne ne tient compte que de la somme des notes, pas de la valeur de chacune d'entre elles). Par conséquent, la somme des notes enlevées est 24. Comme l'une est égale à 5 l'autre est 19.

**Exercice 3**

La moyenne des dix-neuf notes présentes dans le tableau est égale à 228 : 19, c'est-à-dire 12.

Si les notes sont rangées par ordre croissant, la médiane est la 10e note. Elle est égale à 11.

Pour que deux notes supplémentaires ne modifient ni la moyenne ni la médiane, il suffit qu'elles respectent les deux critères suivants :

— leur moyenne est de 12, ce qui revient à dire que leur somme est de 24.

— l'une est supérieure à la médiane, 11, l'autre est inférieure à 11.

10 et 14 sont deux valeurs qui conviennent (4 et 20 ou 8 et 16 conviendraient tout aussi bien).

**Exercice 4**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 3 | | | | | | | |

Le tableau ci-dessus est destiné à recevoir les 15 valeurs, rangées par ordre croissant. La médiane étant de 3, la huitième valeur est 3, elle est déjà placée.

Les valeurs situées à gauche de ce 3 seront inférieures ou égales à 3, les valeurs situées à droite seront supérieures ou égales à 3.

La plus grande somme possible est obtenue en attribuant la valeur 3 à chacune des cases de gauche, 6 à chacune des cases de droite.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

On obtient alors une somme égale à $8 \times 3 + 7 \times 6$, soit 66, ce qui correspond à une moyenne de $66 : 15$ soit 4,4. La plus grande moyenne compatible avec une médiane de 3 étant 4,4 il n'est pas possible d'obtenir une moyenne égale à 5.

Pour que la moyenne soit de 4, il faut que la somme des valeurs soit égale à 60. Il suffit pour cela de modifier quelques valeurs dans le tableau précédent. Les tableaux suivants montrent des répartitions dont la moyenne est 4 et la médiane 3.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |

**Exercice 5**

Le tableau ci-dessous s'interprète ainsi : les intitulés R1, R2... de la ligne de titres indiquent la boule tirée en premier, les intitulés R1, R2, de la colonne de titres indiquent la boule tirée en second. Chaque case intérieure du tableau correspond ainsi à une des issues possibles.

| | R1 | R2 | R3 | B1 | B2 |
|---|---|---|---|---|---|
| R1 | | | | | |
| R2 | | | | | |
| R3 | | | | | |
| B1 | | | | | |
| B2 | | | | | |

Les cases qui correspondent à une issue pour laquelle les deux boules sont de la même couleur ont été grisées. On constate qu'il y a 13 issues favorables sur 25 possibles, la probabilité cherchée est donc de 13/25, ou 52%.

**Exercice 6**

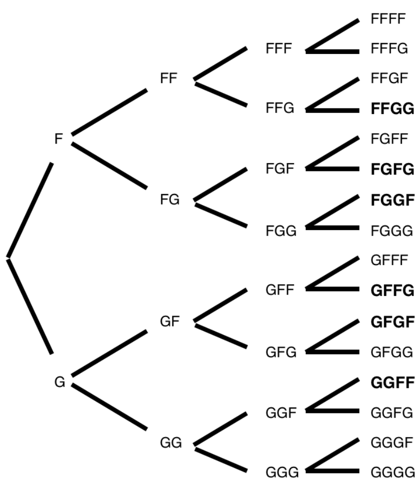
La probabilité que le deuxième tirage soit égal au premier est de 1/6 (quelle que soit la valeur du premier tirage, il y a une chance sur six de tirer à nouveau cette valeur).

La probabilité pour que les deux tirages aient des valeurs différentes est donc de 1 - 1/6 soit 5/6.

Il y a autant de chance d'obtenir un deuxième tirage supérieur au premier qu'un deuxième tirage inférieur, chaque alternative a donc une probabilité égale à la moitié de 5/6, c'est-à-dire 5/12.

*Remarque : en s'appuyant sur un tableau à double entrée de 36 cases, on trouve 15 cases correspondant à un second tirage supérieur au premier, la probabilité est de 15/36, ce qui est bien égal à 5/12.*

**Exercice 7**




L'arbre ci-dessus montre qu'il y a 6 cas avec deux filles et deux garçons pour 16 cas au total (tous équiprobables).

La probabilité qu'il y ait deux filles et deux garçons dans une famille de 4 enfants est donc égale à 6/16, ou 3/8.

*Remarque : en traduisant chacune des possibilités par une suite de quatre lettres du type FFFG, comme on l'a fait dans l'arborescence, il n'est pas nécessaire de dessiner l'arbre. Écrire par ordre alphabétique les suites de quatre lettres obtenues avec F et G assure qu'on les obtient toutes (la liste figure verticalement à la droite de l'arborescence).*

**Exercice 8**

Les méthodes décrivant les trois tirages successifs par une arborescence, ou par une suite de trois nombres sont possibles, nous en proposons ici une autre :

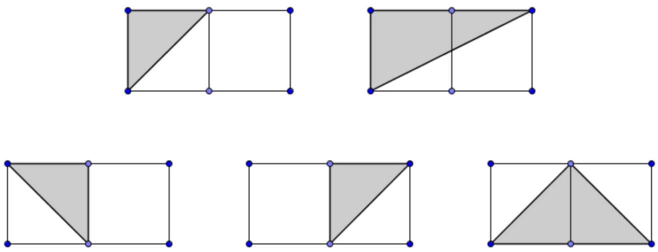
La somme des quatre nombres figurant sur les boules est 10. Si la somme des trois nombres tirés est 7, c'est que la boule restante porte le numéro 3.

Or chaque boule a autant de chance d'être la boule restante, la probabilité que la somme des nombres tirés soit 7 est donc égale à $1/4$.

**Exercice 9**

Le sommet de l'angle droit des triangles rectangles que l'on cherche à dénombrer peut être placé soit sur l'un des quatre sommets du rectangle, soit au milieu de l'une de ses longueurs.

Pour chaque sommet du rectangle, il y a deux triangles possibles, et pour chaque milieu de longueur il y a trois triangles possibles comme l'indiquent les schémas qui suivent.



On peut donc tracer en tout $4 \times 2 + 2 \times 3$, soit 14 triangles rectangles.

**Exercice 10**

Cherchons le nombre de drapeaux bicolores.

Nous pouvons les répartir en trois familles : jaune et rouge ; jaune et vert ; rouge et vert.

Chaque drapeau bicolore est constitué de deux rectangles de chaque couleur, car si trois rectangles étaient d'une même couleur certains rectangles ayant un côté commun seraient de la même couleur, ce qui est interdit.

Si on choisit la couleur du rectangle en haut à gauche, on n'a plus aucun choix pour les autres cases, la famille « jaune et rouge » comporte donc deux éléments, selon que ce rectangle est jaune ou rouge. Il en est de même des deux autres familles, il y a donc en tout 6 drapeaux bicolores possibles.

Cherchons le nombre de drapeaux tricolores.

Nous pouvons les répartir en trois familles : deux rectangles sont jaunes ; deux rectangles sont rouges ; deux rectangles sont verts.

Pour chacune de ces familles, on peut envisager deux cas, selon la « diagonale » occupée par les deux rectangles de même couleur. Dans chacun de ces cas, il y a 2 façons de placer les deux couleurs restantes.

Le nombre de drapeaux tricolores possibles est donc de $3 \times 2 \times 2$, soit 12.

Le nombre total de drapeaux différents possibles est donc 18.

**Exercice 11**

Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des deux autres (ce qui revient à dire que le chemin en ligne droite d'un sommet à un autre est plus court que le trajet passant par le troisième sommet).

Il est donc impossible d'avoir un côté de 8 cm ou plus.

Nous allons décrire les triangles possibles sous forme d'une suite de trois nombres rangés par ordre décroissant (ces nombres sont les longueurs en cm des côtés).

Les possibilités sont :

771 ; 762 ; 753 ; 744

663 ; 654

555

On peut donc tracer 7 triangles différents respectant les critères donnés.

**Exercice 12**

Un polygone a 12 côtés, combien a-t-il de diagonales ?

Pour tracer une diagonale, on commence par choisir un sommet (12 choix possibles) puis un second sommet (9 choix possibles, car on ne peut ni reprendre le même sommet ni un de ses voisins, ce qui donnerait un côté et non une diagonale). Il y a donc $12 \times 9 = 108$ choix possibles.

Chaque diagonale est obtenue de deux façons différentes dans le décompte précédent. Par exemple la diagonale [AD] est obtenue en choisissant A puis D ou bien en choisissant D puis A.

Le nombre de diagonales du polygone à 12 côtés est donc de 54.

*Remarque : cette méthode est un assouplissement de celle que nous conseillons : partager les objets à dénombrer en familles de façon à ce que chaque objet soit compté une fois et une seule est souvent une bonne idée, mais en réalité il importe seulement que tous les objets soient comptés le même nombre de fois. Si chaque objet est compté trois fois, il suffit de diviser par trois le nombre obtenu.*