Des morceaux tous différents

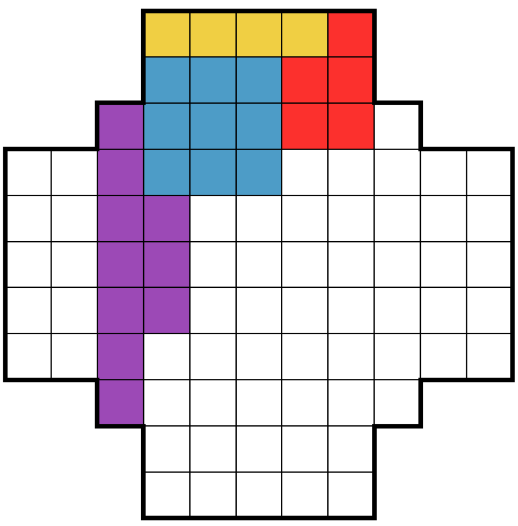
En bref

Découper une forme quadrillée donnée en suivant les lignes du quadrillage.

Les morceaux doivent être tous différents et le plus nombreux possible.

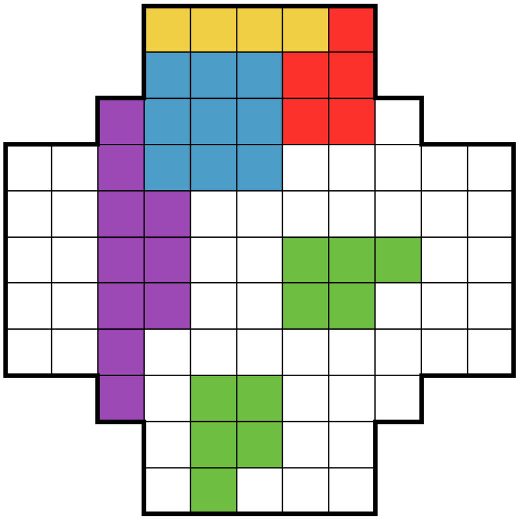
Introduction du problème

J'ai colorié sur cette figure plusieurs morceaux, en suivant les lignes du quadrillage.



C'est ce que vous allez faire également, mais attention : vous n'avez pas le droit de dessiner deux morceaux identiques, même s'ils sont dans des positions différentes.

Je n'ai pas le droit de continuer comme sur la figure suivante parce que les deux morceaux verts sont identiques au morceau rouge : si on les découpe, on peut les superposer.

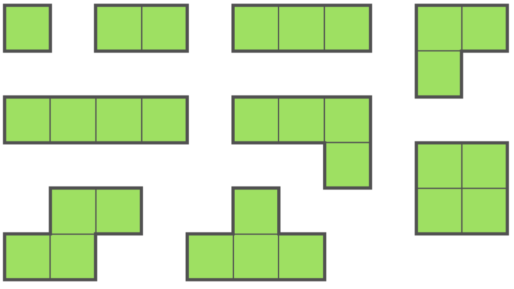


Le but est de découper entièrement la grille en morceaux différents, il doit y en avoir le plus possible.

Éléments de relance

— Les premières tentatives aboutiront fréquemment à des doublons. Pour vérifier plus facilement qu'il n'y en a pas, on peut placer une marque d'une même couleur dans tous les morceaux ayant le même nombre de carreaux.

— Si on veut placer beaucoup de morceaux, il semble raisonnable d'utiliser des morceaux aussi petits que possible. L'enseignante peut suggérer de faire l'inventaire des petits morceaux disponibles avant de chercher à les placer sur la figure. On voit facilement qu'il n'existe qu'un morceau à un carreau, un morceau de deux carreaux et deux morceaux différents de trois carreaux. Pour les morceaux à 4 carreaux, c'est un peu plus délicat, mais on se convainc assez vite qu'il n'en existe que 5 (il ne nous semble pas utile d'en formaliser une preuve).



L'inventaire des morceaux à 5 carreaux serait bien utile, mais est sensiblement plus difficile.

— Il est probablement plus facile de placer d'abord les grands morceaux dont on dispose (le morceau de deux carreaux n'est pas très difficile à placer, sans parler du morceau d'un seul carreau…).

Éléments de preuve

Les morceaux à 1, 2, 3 et 4 carreaux occupent, si on les utilise tous, 29 carreaux.

La figure à découper comporte en tout 89 carreaux.

Il reste donc 60 carreaux à partager en morceaux ayant chacun 5 carreaux ou plus de 5 carreaux.

Comme $12 \times 5 = 60$, on ne pourra pas placer plus de 12 morceaux.

En comptant les 9 morceaux plus petits déjà utilisés, on ne pourra pas placer plus de 21 morceaux.

Après cette explication, le schéma indiquant l'état des connaissances de la classe ressemble probablement à ceci :

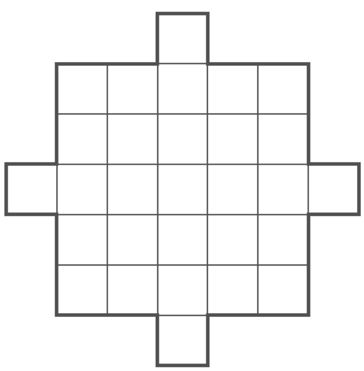
17 18 19 20 21 ~~22~~ ~~23~~

Si dans une classe un exemple comportant 21 morceaux différents à déjà été trouvé, le problème est clos : on sait obtenir 21 et on sait qu'il est impossible de faire mieux.

Sinon, cette preuve fournit un élément de relance de la recherche : pour placer 21 morceaux, il faut disposer de 12 morceaux à 5 carreaux différents, il est donc utile d'essayer en trouver 12. Si on y parvient, il restera à les placer.

Aménagements pour le cycle 2

Poser le même problème à propos de cette figure :



Prolongements pour le cycle 4

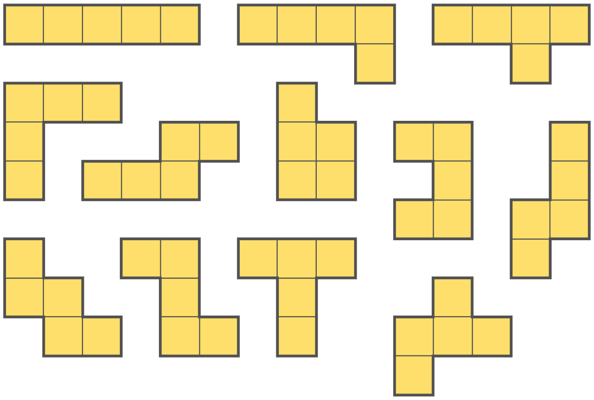
Poser le même problème à propos d'un carré 10 x 10.

Il est relativement facile de découper ce carré en 22 morceaux différents mais prouver qu'il est impossible d'on placer 23 est plus délicat.

Comme il n'existe que 12 pièces de 5 carreaux, en utilisant ces 12 pièces et les 9 pièces plus petites on recouvre 89 carreaux (comme dans la version cycle 3). Il reste donc 11 carreaux disponibles pour placer des morceaux qui en contiennent au moins 6, on ne peut donc placer qu'un morceau de plus, soit 22 morceaux. Cette preuve repose sur le fait qu'il n'existe que 12 pièces de 5 carreaux, affirmation qu'il faut donc prouver alors que ce n'est pas nécessaire pour le problème que nous proposons au cycle 3.

Compléments

Voici 12 pièces différentes de 5 carreaux chacune.



Il n'en existe pas d'autre, mais il n'est pas nécessaire de le savoir pour résoudre le problème.

Voici une des nombreuses façons possibles de disposer ces 12 pièces et les pièces plus petites dans la grille.

La figure est ainsi découpée en 21 morceaux différents.